Тип работы: Статья

Предмет: Дифференциальные уравнения

-

Аннотация По двойственному представлению развертывающуюся поверхность можно рассматривать как кривую двойственного проективного трехмерного пространства. После введения соответствующей метрики в двойственном пространстве и ограничения специальных параметризаций задействованных поверхностей мы выводим алгоритмы линейной аппроксимации для развертываемых NURBS-поверхностей. Особое внимание уделяется контролю кривой регрессии.
Ключевые слова: автоматизированное геометрическое проектирование, аппроксимация поверхности, развертывающаяся поверхность, двойственное представление, NURBS.

Развертываемая поверхность — это поверхность, которую можно развернуть в плоскость, не растягивая и не разрывая. С математической точки зрения существует отображение поверхности на евклидову плоскость, которая является изометричной, по крайней мере, локально. Благодаря этому свойству развертываемые поверхности имеют множество применений при производстве материалов, не поддающихся растяжению. К ним относится формирование обшивки самолетов, корпусов кораблей, воздуховодов и автомобильных деталей, таких как обивка, панели кузова и ветровые стекла. Поскольку современные системы CAD/CAM используют рациональные B-сплайны (NURBS) в качестве стандарта для представления кривых и поверхностей, существует потребность в эффективных вычислениях с развертываемыми NURBS-поверхностями. Есть в основном два подхода к работе с рациональными развертываемыми поверхностями. С одной стороны, такую поверхность можно выразить как поверхность тензорного произведения степени и решить нелинейные боковые условия, выражающие развертываемость [1, 2, 5]. С другой стороны, мы можем рассматривать поверхность как оболочку своего однопараметрического набора касательных плоскостей и, таким образом, рассматривать ее как кривую в дуальном проективном пространстве [3, 4, 6]. На основе последнего подхода недавно были представлены некоторые алгоритмы интерполяции и аппроксимации, а также начальные решения для специальных приложений.
В настоящей работе мы развиваем дальнейшее использование двойственного представления для решения задач фундаментальной аппроксимации с развертывающимися поверхностями. Новые алгоритмы основаны на соответствующих метриках в двойном пространстве, а также на ограничении специальными классами поверхностей. Таким образом, большинство из них носит линейный характер.
Только выталкивание линии регрессии из области интереса требует решения задачи выпуклого программирования.
Развертываемые поверхности могут быть изометрически отображены на плоскость, по крайней мере, локально. Когда предполагается достаточная дифференцируемость, они характеризуются исчезновением своей гауссовой кривизны. Неплоская развертывающаяся поверхность является оболочкой своего однопараметрического семейства касательных плоскостей. Такая развертывающаяся поверхность локально представляет собой либо коническую поверхность, либо цилиндрическую поверхность, либо касательную поверхность скрученной кривой. Глобально, конечно, это может быть довольно сложная композиция из этих трех типов поверхности. Таким образом, развертывающиеся поверхности являются линейчатыми поверхностями, но с тем особым свойством, что они обладают одной и той же касательной плоскостью во всех точках одной и той же образующей.
Мы будем проводить наши вычисления в проективном расширении вещественного Евклидова трехмерного пространства и использовать однородные декартовы координаты для точек. Для точек, не удаленных на бесконечность, т. е. , соответствующие неоднородные декартовы координаты будут обозначаться через
, , ;
запишем .
Уравнение плоскости или, что то же самое, может быть представлена своими однородными плоскими координатами .

Поскольку во всех точках образующей касательная плоскость одна и та же, мы можем отождествить развертывающуюся поверхность с однопараметрическим семейством ее касательных плоскостей , или, другими словами, с некоторой кривой в дуальном проективном пространстве. Если эта кривая является кривой NURBS
,
(1)
мы называем исходную поверхность развертываемой NURBS-поверхностью. Здесь обозначают нормированные базисные функции B-сплайна степени над заданным вектором узла. Слово «нормализованный» означает, что сумма базисных функций есть постоянная функция 1. Символ обозначает координатную четверку -й плоскости управления . Конечно, координатная четверка содержит больше информации, чем просто плоскость как набор точек, но для простоты мы говорим только о координатах плоскости.
Нет никакой математической причины, почему мы ограничиваемся B-сплайнами. Однако у них есть много свойств, которые облегчают работу с ними. Легко проверяется справедливость теоремы для развертывающихся поверхностей, которые также моделируются другим пространством сплайнов, если это пространство сплайнов обладает всеми свойствами пространства B-сплайнов, которые используются в доказательстве этой теоремы.
Хорошо известно, что плоскость касается оболочки семейства по образующей

В частности, правила, которые соответствуют значениям параметров, являющихся -кратными узлами (обычно и), могут быть легко выражены в терминах плоскостей управления.
Ребро возврата или линия регрессии поверхности получается, как пересечение

В общем случае это рациональная B-сплайновая кривая степени . Недавно были разработаны алгоритмы вычисления с двойственным представлением, преобразования к стандартному представлению тензорного произведения и решения интерполяции и некоторые алгоритмы аппроксимации. В этой статье мы исследуем дальнейшее приближение и с развертывающимися поверхностями. Это не прямое применение двойственности, как можно было бы ожидать, поскольку двойственность не распространяется на евклидову метрику и, более того, евклидова геометрия не содержит мер отклонения между плоскостями, которые были бы полезны в данном контексте.
Для алгоритмов аппроксимации, обсуждаемых в этой статье, мы ограничим класс развертываемых поверхностей, с которыми мы работаем: мы рассматриваем только поверхности, семейство касательных плоскостей которых имеет вид
,
(2)
Для NURBS-поверхностей это эквивалентно выбору таких плоскостей управления , при этом всегда . Это означает, что для всех возможных плоскостей мы больше не позволяем выбирать произвольную координатную четверку, описывающую , а ограничиваемся единственной, последняя координата которой равна −1. Это невозможно, если последняя координата равна нулю, поэтому мы должны исключить все поверхности с касательными плоскостями, параллельными оси . В

1. Wassum, P. Geometric Continuity Between Adjacent Rational Bézier Surface Patches // Geometric Modelling. - 1993. - No 8. - p. 291-316.
2. Mamaloukas, Ch. Developable surfaces which are surface of revolution // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2005. - No 3. – p. 303-311
3. Erwin Kreyszig, A new standard isometry of developable surfaces in CAD/CAM // Siam J. Math. Anal. – 1994. - No. 1, p. 174-178.
4. M.J. Mancewicz, W.H. Frey, Developable Surfaces: Properties, Representations and Methods of Design // General Motors R&D Publication, 7637 (1992).
5. H. Pottmann, Studying NURBS curves and surfaces with classical geometry // In: Mathematical Methods for Curves and Surfaces (Ed-s: M. Daehlen,T. Lyche, L.L. Schumaker), Vanderbilt University Press, Nashville. – 1995. p. 413-438.
6. J. Hoschek, M. Schneider, Interpolation and approximation with developable surfaces, in: Curves and Surfaces with Applications in CAGD, A. Le M´ehaut´e, C. Rabut and L.L. Schumaker, eds., Vanderbilt University Press, Nashville 1997, pp. 185–202.