Тип работы: Ответы на билеты

Предмет: Эконометрика

-

Вопрос 19. Оценивание коэффициентов моделей скользящего среднего методами наибольшего правдоподобия и поиска на сетке

Модель скользящего среднего (Model of moving average – MA) – один из распространенных подходов моделирования временных рядов. В этом случае оценка прогнозируемых членов ряда зависит от текущего и прошлых значений и от некоторого стохастического члена (отражает вероятностный характер модели).

Модель является линейной регрессией и записывается в виде (для модели порядка q):

$X_t=\mu+\varepsilon_t+\theta_1 \varepsilon_{t-1}+\dots+\theta_q \varepsilon_{t-q}$,

где μ – среднее значение ряда, $\theta_1\dots\theta_q$ – коэффициенты модели, $\varepsilon_t\dots\varepsilon_{t-q}$ – шумовые компоненты (белый шум).

Как правило, при оценке коэффициентов модели не используют метод наименьших квадратов, вместо этого используют методы наибольшего правдоподобия и поиска на сетке.

Метод наибольшего правдоподобия (МНП). Рассмотрим простейший случай модели скользящего среднего: $x_t=\varepsilon_t-\theta\varepsilon_{t-1}$. Или при переходе от x_t к ε_t:

$x_1=\varepsilon_1-\theta\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_1=x_1+\theta\varepsilon_0$;

$x_2=\varepsilon_2-\theta\varepsilon_1 \rightarrow x_2=\varepsilon_2-\theta(x_1+\theta\varepsilon_0)\rightarrow\varepsilon_2=x_2+\theta x_1+\theta^2 \varepsilon_0$ и т.д.

или же в векторной форме: $\varepsilon=\tilde\theta\varepsilon_0+Qx$, где $\tilde\theta$ – коэффициенты при ε_0, Q – коэффициенты при x.

Пусть ε_t – последовательность случайных величин, имеющих одинаковое нормальное распределение, при этом среднее равно 0, а дисперсия: σ_ε^2. Тогда плотность вероятности: $f(\varepsilon_0,\dots\varepsilon_T)=(2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-(T+1)/2}{}^{\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=0}^{T}\varepsilon_t^2\right)}$. Суть метода максимального правдоподобия – поиск такого коэффициента θ, при котором достигает максимума функция $f(\varepsilon_0,\dots\varepsilon_T)$ или, эквивалентно, достигает минимума сумма квадратов:

$S(\theta|\varepsilon_0)=\sum_{t=0}^{T}\varepsilon_t^2=\varepsilon_0^2+\varepsilon'\varepsilon=(1+\tilde\theta'\tilde\theta)\varepsilon_0^2+2x'Q'\tilde\theta\varepsilon_0+x'Q'Qx$

При использовании МНП возникает проблема в определении ε_0. При первом способе полагают $\varepsilon_0=0$ и минимизируют значение $x'Q'Qx$. Полученное решение называют условным МНК-решением, а найденные $\theta^*=\arg\min(x'Q'Qx)$ – условной МНК-оценкой.

При втором способе ε_0, как и θ, входят в число подлежащих минимизации свободных параметров. Полученное при таком подходе значение θ^* называют точной МНК-оценкой для θ и $\hat\varepsilon_0=-(x'Q^{*\prime}\tilde\theta^*)/(1+\tilde\theta^{*\prime}\tilde\theta^*)$.

Проведем небольшой анализ и введем замену $1+\tilde\theta'\tilde\theta=K$. Тогда функцию правдоподобия можно представить в виде:

$f(\varepsilon_0,\dots\varepsilon_T)=f(\varepsilon_0,x_1\dots x_T)=\left(\frac{2\pi\sigma_\varepsilon^2}{K}\right)^{-1/2} e^{-\frac{K}{2\sigma_\varepsilon^2}(\varepsilon_0-\hat\varepsilon_0)^2}\bullet K^{-1/2}(2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-T/2} e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}S(\theta)}$,

где $S(\theta)=x'Q'Qx-(x'Q'\tilde\theta)^2/(1+\tilde\theta'\tilde\theta)$.

Первая часть записи функции правдоподобия – функция плотности распределения неизвестного значения ε_0, а вторая – частная функция плотности распределения вероятности наблюдений $x_1\dots x_T$. Тогда необходимо решить задачу: $f(\varepsilon_0,|x_1\dots x_T)\bullet f(x_1\dots x_T)\rightarrow\max_{\varepsilon_0,\theta}$. В результате получим: $K^{1/T}S(\theta)\rightarrow\min_{\theta}$. Значение $\hat\theta^*$, минимизирующее функцию $K^{1/T}S(\theta)$, называют точной МНП-оценкой. Множитель $K^{1/T}$ существует только при малом объеме выборок, так как с ростом T указанный множитель будет стремиться к 1. При больших объемах T множитель $K^{1/T}$ можно не учитывать, приняв незначительно смещение оценки, но сильно сократив объем вычислений. Именно этим объясняется использование точных МНК-оценок.

Метод поиска по сетке является самым простым в реализации и понимании, но, к сожалению, неэффективен, когда количество параметров велико и не сильно ограничено. Пусть θ* — пространство параметров $\theta=(\theta_1,\theta_2,\dots\theta_m)$, по которым мы максимизируем значение x. Простой способ настройки поиска по сетке состоит в определении вектора нижних границ a = (a1, a2, ..., am) и вектора верхних границ b = (b1, b2, ..., bm) для каждого компонента θ. Поиск по сетке включает в себя взятие n равномерно расположенных точек в каждом интервале формы [ai, bi], включая ai и bi. Это создает в общей сложности nm возможных точек сетки для проверки. Наконец, после вычисления каждой пары точек выбирается максимальное из этих значений.

Проблема с этим типом метода заключается в том, что количество оценок увеличивается экспоненциально по мере увеличения n и m. Поскольку мы не можем реально уменьшить m, уменьшение n - единственный возможный способ гарантировать, что метод остановится в разумные сроки, но это снижает достоверность решения.

Вопрос 20. Оценивание коэффициентов процессов ARMA

Модель ARMA – модель авторегрессии – скользящего среднего, которая обобщает две более простые модели – авторегрессии AR и скользящего среднего MA. Используется для анализа и прогнозирования стационарных временных рядов в статистике.

Для оценки параметром модели ARMA используют метод наибольшего правдоподобия, используя логарифмическую функцию парвдоподобия.

Пусть модель ARMA имеет вид ряда: $x_t-\varphi_1 x_{t-1}-\ldots-\varphi_p x_{t-p}=\varepsilon_t-\theta_1 \varepsilon_{t-1}-\ldots-\theta_q \varepsilon_{t-q}$. Пусть ε_t – последовательность случайных величин, имеющих одинаковое нормальное распределение, при этом среднее равно 0, а дисперсия: σ_ε^2.

Выразим ковариационную матрицу $x=(x_1,\ldots,x_t)$ через автоковариационную функцию (ковариация значений функции, зависящая от величины «сдвига по времени») стационарного ARMA-процесса $\gamma_i=E[x_t x_{t-i}]$:

$$\Gamma=\begin{pmatrix}\gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_{T-1}\\ \gamma_1 & \gamma_0 & \ldots & \gamma_{T-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_{T-1} & \gamma_{T-2} & \ldots & \gamma_0\end{pmatrix}$$

Полученная матрица Г – симметричная тёплицевая (матрица Тёплица – матрица, в которой на всех диагоналях, параллельных главной, стоят равные элементы) матрица. Выпишем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L(\theta,\varphi,\sigma_\varepsilon^2)=-\frac{T}{2}\ln(2\pi\sigma_\varepsilon^2)-\frac{1}{2}\ln|\Gamma|-\frac{1}{2}x'\Gamma^{-1}x$$

Обозначим через r_i автоковариацию, нормированную на дисперсию ошибок, т.е. $r_i=\gamma_i/(\sigma_\varepsilon^2)$. Матрицу Г обозначим через R, тогда логарифмическая функция правдоподобия запишется в виде:

$$\ln L(\theta,\varphi,\sigma_\varepsilon^2)=-\frac{T}{2}\ln(2\pi\sigma_\varepsilon^2)-\frac{1}{2}\ln|R|-\frac{1}{2}x'R^{-1}x\to\max!$$

Воспользуемся условиями первого порядка оценки параметров согласно МНК (условиями минимума функции являются равенство нулю первых производных и положительность вторых производных):

$$\frac{d\ln L(\theta,\varphi,\sigma_\varepsilon^2)}{d\sigma_\varepsilon^2}=0$$

Получим оценку σ_ε^2 как функцию от θ и φ:

$$\sigma_\varepsilon^2=\sigma_\varepsilon^2(\theta,\varphi)=\frac{x'R^{-1}x}{T}$$

Подставив полученную оценку σ_ε^2 в логарифмическую функцию правдоподобия, получим концентрированную функцию правдоподобия:

$$\ln L^c(\theta,\varphi)=-\frac{T}{2}\ln(2\pi)-\frac{T}{2}-\frac{1}{2}\ln|R|-\frac{T}{2}\ln\left(\frac{x'R^{-1}x}{T}\right)\to\max!$$

Точные оценки параметров ARMA-процесса находят, максимизируя функцию $\ln L^c(\theta,\varphi)$.

-