Тип работы: Курсовая работа

Предмет: Высшая математика

Оглавление

Введение
История понятия числа — увлекательная глава в истории математики. Это определение много раз изменялось на протяжении многих столетий. В греческой математике слово «число» (αριϑμος) имело фиксированное значение со времен Пифагора (ок. 580–500 до н. э.), а именно, положительное натуральное число определялось как совокупность единиц. Термины рациональные, иррациональные, отрицательные, мнимые и действительные числа впервые появились в Средние века.
В школьной математике мы знакомимся с целыми числами как продолжением натуральных чисел. Рациональные числа являются расширением натурального набора чисел. Символом рациональных чисел является Q.
При расширении набора чисел к натуральным числам добавляются дроби. Рациональное число определяется как отношение между двумя целыми числами. Эти числа, которые имеют десятичные разряды или представлены в виде дроби, мы называем также дробными числами.
Вполне вероятно, что понятие дробей восходит к доисторическим временам. Даже древние египтяне писали математические тексты, описывающие, как преобразовать обычные дроби в их конкретное обозначение.
Рациональное число — это действительное число, которое можно представить как отношение двух целых чисел. Для обозначения набора всех рациональных чисел используется обозначение . Он включает в себя все числа, которые могут быть представлены в виде дроби, содержащей целые числа как в числителе, так и в знаменателе. Точное математическое определение основано на классах эквивалентности пар целых чисел.
Тема данной работы: «Система рациональных чисел». Цель работы состоит в рассмотрении понятия рациональных чисел, выяснению противоречий аксиоматической теории и практической иллюстрации их свойств.
Для достижения цели работы необходимо решить следующие задачи:
1. Дать определение рациональных чисел и показать их свойства;
2. Выполнить аксиоматическое построение поля этих чисел;
3. Выяснить противоречивость аксиоматической теории рациональных чисел;
4. Проиллюстрировать свойства системы рациональных чисел на практике.
5. Сделать выводы.

.

1. Аксиоматическое построение поля рациональных чисел. Первичные термины.
Рациональные числа (иногда называемые «дробными числами») являются расширением диапазона целых чисел, позволяющим также выполнять общее деление двух (или более) чисел.

Рациональные числа как надмножество целых чисел
Все целые числа включены как подмножество в множество рациональных чисел {Q}. Кроме того, все числа, которые могут быть представлены в виде дроби от двух целых чисел m и n, добавляются как дополнительные элементы:

)
Число над чертой дроби называется числителем, а число под чертой дроби называется знаменателем дроби. Единственное условие — оно не должно делиться на ноль, поэтому оно должно быть .
Рациональные числа также можно расположить в виде числовой строки в соответствии с их размером; целые числа встраиваются как часть рациональных чисел в соответствующие места.

Рисунок 1. Числовой ряд рациональных чисел.

Первым, наиболее интуитивно понятным понятием в области теории чисел является понятие натурального числа. Следующий шаг в обобщении понятия числа связан с операцией деления. В множестве целых чисел не всегда найдется число x такое, чтобы a*x = b. В общем случае решение такого уравнения можно формально записать в виде x = b□a-1, однако, это выражение в рамках целых чисел часто не имеет никакого смысла. Множество целых чисел пополняется решениями таких уравнений (при этом требуется, чтобы $a \neq 0$). Эти решения принято записывать в виде дробей b□a-1 = и называть их рациональными числами (от латинского ratio – отношение). В данном случае числа a и b являются целыми. Часто требуют, чтобы число a было натуральным (если это не так, то уравнение ax = b можно просто умножить на –1), тогда уже не требуется дополнительно обговаривать, что $a \neq 0$. Число b называется числителем дроби, а число a – знаменателем.
Проведем аксиоматическое построение поля рациональных чисел.
Определение 1. Пусть (a, b), (c, d) ∈ Z× (Z−{0}). Требуется определить (a, b) (c, d) при условии, что ad = bc.
Теорема 1. Отношение Q в определении 1 является отношением эквивалентности на Z × (Z − {0}).
Например, (5, 3) (10, 6) и (2, 5) (6, 15). (Нужно представлять a*b, когда написано (a, b); второй компонент никогда не равен 0.) В первом примере частное между каждым первым компонентом и вторым компонентом равно в сокращенной форме, а во втором примере частное между каждым первым компонентом и вторым компонентом равно в приведенной форме. Эти редуцированные формы действительно являются представителями классов эквивалентности дробей. Чтобы сделать это точным, будем строить рациональные числа как классы эквивалентности множества упорядоченных пар целых чисел с ненулевым вторым компонентом.
Определение 2. Множество классов эквивалентности в определении 1 — это множество рациональных чисел, обозначаемых Q.
Рассмотрим класс эквивалентности
[(5, 3)] = {. . . , (−15, −9), (−10, −6), (−5, −3), (5, 3), (10, 6), (15, 9) . . . }.
Мы отождествляем это с рациональным числом . Точно так же мы отождествляем класс эквивалентности (2, 5) с рациональным числом . Мы будем писать 0Q для рационального числа (0, 1) и 1Q для рационального числа [(1, 1)]. Следует обратить внимание, что 1Q= 0Q.
Как и в случае с целыми числами, следует определить обычные операции сложения и умножения над рациональными числами, но поскольку мы будем пытаться складывать и умножать целые классы эквивалентности, используя репрезентативные элементы, мы должны показать, что эти операции четко определены, прежде чем мы сможем сделать другие операции.
Требуется таким образом определить умножение на этом множестве классов эквивалентности. Если, как и выше, (a, b) является представителем рационального x и (c, d) является представителем рационального y, то для вычисления произведения xy мы получаем или .
Как и при определении сложения и умножения целых чисел, мы должны показать, что обе эти бинарные операции не зависят от выбора представителей из классов эквивалентности, которые образуют элементы Q.
Теорема 2. Предположим, что (a1; b1) (a2; b2) и (c1; d1) (c2; d2), где каждая упорядоченная пара лежит в Z × (Z − f0g). затем
(1) (a1d1 + b1c1; b1d1) (a2d2 + b2c2; b2d2), и
(2) (a1c1; b1d1) (a2c2; b2d2).
Доказательство. Заметим, что для каждой части b1d1 6= 0 и b2d2 6= 0, так как вторая компонента каждой

из исходных упорядоченных пар является элементом Z − f0g.
(2) Предположим, что (a1;b1) (a2;b2) и (c1;d1) (c2;d2). Тогда a1b2 = b1a2 и c1d2 = d1c2.
Используя коммутативные и ассоциативные свойства целых чисел, а также эти два уравнения, мы имеем (a1c1)(b2d2) = (a1b2)(c1d2) = (b1a2)(d1c2) = (b1d1)(a2c2). Но отсюда следует (a1c1; b1d1) (a2c2; b2d2), что нам и нужно.

2. Свойства рациональных чисел.
С алгебраической точки зрения множество рациональных чисел Q является полем. Множество Ω называется полем, если в нем определены две операции (x,y)→x+y, (x,y)→x y, называемые соответственно сложением и умножением, со следующими свойствами. Сложение ассоциативно и коммутативно с нейтральным элементом, обычно обозначаемым 0. Более того, каждый элемент x∈Ω имеет противоположный элемент. Умножение ассоциативно и коммутативно с нейтральным элементом, обозначаемым e или 1, отличным от 0. Ненулевые элементы Ω имеют обратный элемент. Наконец, умножение отделимо относительно сложения. Поле Ω называется линейно упорядоченным, если в нем существует отношение линейного порядка, совместимое с алгебраическими операциями в том смысле, что оно имеет место, когда обе части неравенства складываются или умножаются на одно и то же положительное число. Изоморфизм линейно упорядоченных полей Ω1, Ω2 называется биекцией φ: Ω1→Ω2 со свойствами:
(a) ϕ(x + y) = ϕ(x) + ϕ(y),
(b) ϕ(xy) = ϕ(x)ϕ(y),
(c) если x y, to ϕ(x) ϕ(y) для x, y ∈ Ω1.
С точки зрения анализа важным является свойство непрерывности поля.
1.1 (свойство непрерывности). Пусть сверху задано непустое подмножество E линейно упорядоченного поля Ω. Среди чисел, ограничивающих E сверху, всегда есть наименьшее число.
1.2 (эквивалентная формулировка). Пусть непустое подмножество E линейно упорядоченного поля Ω ограничено снизу. Среди чисел, ограничивающих E снизу, всегда найдется наибольшее число.
1.3. Определение. Если линейно упорядоченное поле удовлетворяет аксиоме непрерывности, то наименьшая верхняя грань ограниченного сверху множества E называется его верхней границей и обозначается через sup E. Наименьшая нижняя грань ограниченного снизу множества F называется его нижней гранью и обозначается inf F.
1.4. Поле рациональных чисел Q не удовлетворяет аксиоме непрерывности.
Доказательство. Начнем с уже известного Пифагору наблюдения, что уравнение x2 = 2 не имеет решений в рациональных числах. В самом деле, предположим, что некоторое рациональное число x, заданное несокращаемой дробью x = p/q, удовлетворяет этому уравнению. Тогда:
p2=2q2
значит, p2 — четное число. Но тогда и q2, а значит, и q — четное число, что противоречит несократимости p/q.
Рассмотрим множества

Оба непусты, так как 1 ∈ E и 2 ∈ F. Покажем, что F не имеет наименьшего элемента, так что для для любого y ∈ F существует z ∈ F такое, что z y. Для n ∈ N пусть yn = y − 1/n. Тогда:

Однако, если:

Тогда z = yn — это элемент, который мы ищем.
Точно так же мы показываем, что в E нет наибольшего элемента.
Из тождества:

заключаем, что y является верхней границей E тогда и только тогда, когда y2 > x2 для всех x ∈ E, что показывает, что каждый элемент F является верхней гранью E. Никакое отрицательное число не является верхней границей для E. Это не может быть также ни один из элементов E, потому что E не имеет самого большого элемента. Итак, F — это множество всех верхних границ E, но нет наименьшего элемента, что завершает доказательство.
Далее будем использовать 1 для представления единицы в поле Ω. Позволять n1 = 1 + 1 + · · · + 1, n ∈ N, где сумма включает n одинаковых слагаемых.
1.5 (Свойство Архимеда). Пусть Ω — линейно упорядоченное поле со свойством непрерывности. Тогда для

любого числа a > 0 существует k ∈ N такое, что k1 > a.
Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда a является верхней границей E = {k1 : k ∈ Z}. По принципу непрерывности (1.1) существует наименьшая верхняя грань c для E. Имеем c − 1 c, поэтому c − 1 не является верхней границей для E. Следовательно, существует k ∈ Z такое, что k1 > c − 1 , а это влечет (k + 1)1 > c, несмотря на то, что c является ограничением E. Противоречие.
1.6. Если поле Ω обладает архимедовым свойством, то для любого a > 0 и каждого b ∈ Ω существует k ∈ N такое, что:

1.7. Поле рациональных чисел Q обладает архимедовым свойством 1.5, хотя и не удовлетворяет аксиоме непрерывности.
1.8. Лемма. Пусть Ω — поле, а P — подмножество Ω со свойствами:
1) Ω \ {0} = P ∪ −P,
2) P ∩ (−P) = ∅,
3) Если x, y ∈ P, то x + y ∈ P и xy ∈ P.
Тогда отношение определяется формулой
x > y ⇐⇒ x - y ∈ P
есть отношение линейного порядка в Ω по операциям.
1.9 (свойство плотности). Линейно упорядоченное тело Ω с архимедовым свойством содержит подполе Q, изоморфное полю Q такое, что для любых a, b ∈ Ω если a b, то существует x ∈ Q такой, что a x b.
1.10. Лемма. а) Пусть существуют рациональные числа w, x, y ∈ Q такие, что w x+y. Тогда w = u+v, где u, v рациональны и u x, v y.
б) Пусть существуют положительные рациональные числа w, x, y ∈ Q такие, что w xy. Тогда w = uv, где u, v положительно рациональны и u x, v y.
Доказательство. а) Имея w − x y, значит, существует u ∈ Q такое, что w − x u y, тогда w = u+(w − u) =u + v — это распределение, которое мы ищем.
б) Вторая часть доказывается аналогично.
1.11. Пусть Ω1 и Ω2 — линейно упорядоченные поля, удовлетворяющие аксиоме непрерывности. Тогда существует изоморфизм Φ: Ω1 → Ω2.
Доказательство. По (1.10) существуют плотные Q1 ⊂ Ω1 и Q2 ⊂ Ω2, изоморфные с полем рациональных чисел Q. Пусть ϕ: Q1 → Q2 — изоморфизм этих двух полей.
Начнем со следующего замечания: если:
A(x) = {ϕ(w) : w x, w ∈ Q1}, B(x) = {ϕ(v) : v x, v ∈ Q1},
для любого x ∈ Ω2
sup A(x) = inf B(x).
Действительно, если ϕ(w) ∈ A(x) и ϕ(v) ∈ B(x), то ϕ(w) ϕ(v), поэтому sup A(x) ¬ sup B(x).
В то же время sup A(x) sup B(x) исключается, так как тогда были бы u, t ∈ Q1, такие что sup A(x) ϕ(u) ϕ(t) inf B(x) и мы получили бы x u t x, что является противоречием.
В частности, при x ∈ Q1 имеем:
sup A(x) ϕ(x) = inf B(x), x ∈ Q1,
так что все три величины равны.
Определим Φ: Ω1 → Ω2 следующим образом: для x ∈ Ω1, y ∈ Ω2 пусть
Φ(x) = sup A(x) = inf B(x).
Φ является расширением ϕ.
1) Пусть теперь x, y ∈ Ω1 и x y. Пусть v, w ∈ Q1 таковы, что x v w y. Тогда:
Φ(x) ϕ(v) ϕ(w) Φ(y),
поэтому отображение Φ сохраняет порядок и является взаимно однозначным.
2) Чтобы показать, что Φ - биекция, достаточно сказать, что она включена. Пусть y ∈ Ω2. мы рассмотрим x ∈ Ω1 такое, что Φ(x) = y.
Положим:
C(y) = {w ∈ Q1 : ϕ(w) y}, x = sup C(y).
Если w x, то существует u ∈ C(y) такой, что w u x, поэтому в силу 1) ϕ(w) y и, следовательно, Φ(x) y. С другой стороны, если ϕ(w) y, то w ∈ C(y). Следовательно, w x и ϕ(w) Φ(x), так что
y Φ(x). Наконец, Φ(x) = y, поэтому Φ является биекцией.
3) На следующем шаге покажем, что Φ(−x) = −Φ(x).
Фактически,

$\Phi(-x) = \sup A(-x) = \sup -B(x) = -\inf B(x) = -\Phi(x)$.

4) Теперь мы хотим показать, что $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$. Для этого достаточно заметить, что

$A(x + y) = A(x) + A(y)$.

Действительно, если $\phi(u)+\phi(v) = \phi(u+v) \in A(x)+A(y)$, то $\phi(u+v) \in A(x+y)$, поэтому $A(x) + A(y) \subseteq A(x + y)$.

С другой стороны, если $\phi(w) \in A(x + y)$, то w x + y. Согласно лемме существуют u x и v y такое, что $w = u + v$. Значит, $A(x + y) \subseteq A(x) + A(y)$.

5) Чтобы показать:

$\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$, x, y 0,

достаточно доказать, что $B(xy) = B(x)B(y)$. Доказательство аналогично доказательству 4).

Список литературы

1. Монахов, В.С. Алгебра и теория чисел: практикум: учеб. пособие: в 2 ч. / В.С. Монахов, А.В. Бузланов. — Минск: Изд. центр БГУ, 2007. — Ч. 1. — 264 с.

2. Нечаев, В.И. Числовые системы / В.И. Нечаев. — М.: Просвещение, 1975. — 198 с.

3. . Проскуряков, И.В. Числа и многочлены / И.В. Проскуряков. — М.: Просвещение, 1965. — 283 с.

4. 11. Смолин, Ю.Н. Числовые системы: учеб. пособие / Ю.Н. Смолин. — М.: Флинта: Наука, 2009. — 112 с.

5. 12. Феферман, С. Числовые системы / С. Феферман. — М.: Наука, 1971. — 440 с.