

Эта часть работы выложена в ознакомительных целях. Если вы хотите получить работу полностью, то приобретите ее воспользовавшись формой заказа на странице с готовой работой:

<https://stuservis.ru/kurosovaya-rabota/344902>

Тип работы: Курсовая работа

Предмет: Математический анализ

Введение 3

1. Теоретические аспекты 5

2. Решение практических задач 8

2.1. Неполное квадратное уравнение с одним параметром 8

2.2. Неполное квадратное уравнение с двумя параметрами 11

2.3. Полное квадратное уравнение с одним параметром 13

2.4. Решение квадратных уравнений с одним параметром с помощью теоремы Виета 16

2.5. Полное квадратное уравнение с двумя параметрами 20

2.6. Полное квадратное уравнение с тремя параметрами 24

2.7. Полное квадратное неравенство с одним параметром 26

2.8. Квадратное неравенство с параметром, содержащее модуль 28

Заключение 29

Список использованных источников 30

Если x и y рассматривать как декартовы координаты на плоскости, то действительная функция $y=f(x)$ действительного переменного x часто изображается кривой (графиком функции y от x).

Функция может быть определена таблицей своих значений или правилом вычисления такой таблицы с помощью известных операций (конструктивные определения). Функция может быть определена неявно или с помощью определяющих свойств, описываемых функциональными, дифференциальными или интегральными уравнениями, экстремальными свойствами, поведением при некоторых значениях аргумента и т.д. Каждое неконструктивное определение нуждается в доказательстве существования, устанавливающем, что функция, обладающая указанными свойствами, существует.

В данном случае речь идет о квадратичных уравнениях и неравенствах, а, стало быть, и о соответствующих функциональных зависимостях. Понятие функции здесь затронуто не зря, так как в том числе благодаря данному математическому аппарату будет осуществляться решение задач.

В таком случае уместно поговорить о виде квадратного уравнения и некоторых его свойствах.

Квадратное уравнение может быть записано в виде квадратного трехчлена:

$$f(x)=ax^2+bx+c, a \neq 0,$$

где x - неизвестная переменная (либо корень уравнения), a, b, c - параметры уравнения.

Примечательно, что задано условие $a \neq 0$, в противном случае квадратное уравнение вырождается в линейное. При этом данный вид уравнения является полным, в то время как существуют частные случаи неполного квадратного уравнения, когда $b=0$ или $c=0$, или $b=c=0$:

$$\{ \begin{array}{l} \blacksquare (ax^2+bx=0, \text{ если } c=0 @ ax^2+c=0, \text{ если } b=0 @ ax^2=0, \text{ если } b=0 \text{ и } c=0). \end{array} \}$$

Известно, что квадратное уравнение в общем случае имеет два корня. В первом случае неполного квадратного уравнения первый корень очевиден и равен нулю, в то время как второй корень определяется соотношением входящих в него параметров:

$$ax^2+bx=0$$

$$x(ax+b)=0$$

$$x_1=0, x_2=-b/a$$

Как видно, в данном случае не существует каких-либо ограничений на значения параметров уравнения.

Во втором случае неполного квадратного уравнения будут одинаковые по модулю, но противоположные по знаку корни.:

$$ax^2+c=0$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-c/a}$$

Как видно, сюда напрашивается естественное условие неотрицательности подкоренного выражения.

Поэтому здесь уже уместно говорить об области на плоскости параметров, удовлетворяющей решению данного уравнения.

Третий случай, как и первый, не представляет интереса в силу очевидности нулевого кратного корня.

Фактически это парабола с максимумом или минимумом (в зависимости от знака параметра a) в нуле.

$$ax^2=0$$

$$x_{1,2}=0$$

Наконец наиболее общим типом квадратного уравнения является полное квадратное уравнение и неравенство. Известно, что для существования корней уравнения необходимо, чтобы дискриминант был неотрицательным.

Если дискриминант $D=b^2-4ac>0$, то существует два различных вещественных корня;

В таком случае корни уравнения находятся по формуле:

$$x_{1,2}=(-b\pm\sqrt{D})/2a$$

Если дискриминант $D=b^2-4ac=0$, то существует два одинаковых корня (кратный корень);

В таком случае корни уравнения находятся по формуле:

$$x_{1,2}=(-b)/2a$$

Если дискриминант $D=b^2-4ac<0$, то корней в вещественном поле чисел не существует;

Также ясно, что параметризованным может быть число перед любой степенью уравнения, то есть либо a , либо b , либо c , либо их комбинации.

Отсюда становится еще более интересным наблюдение о всевозможных значениях параметров a, b и c .

Тогда речь идет уже не об области в плоскости параметров, а о трехмерном пространстве с осями a, b и c .

Применительно к неравенствам данная логика также употребима с той лишь разницей, что на первом этапе нужно понять, сочетание каких параметров дает по меньшей мере один вещественный корень, а на втором этапе понять, насколько данный корень (или пара корней) удовлетворяет заданному неравенству.

Таким образом, в рамках решения практических задач предлагается следующая классификация примеров:

Неполное квадратное уравнение с одним параметром;

Неполное квадратное уравнение с двумя параметрами;

Полное квадратное уравнение с одним параметром;

Решение квадратных уравнений с одним параметром с помощью теоремы Виета;

Полное квадратное уравнение с двумя параметрами;

Полное квадратное уравнение с тремя параметрами;

Полное квадратное неравенство с одним параметром;

Квадратное неравенство с параметром, содержащее модуль.

Решение практических задач

Неполное квадратное уравнение с одним параметром

Пример 1: определить допустимые значения параметра c , при котором неполное квадратное уравнение имеет два вещественных корня:

$$5x^2+c=0$$

Решение: очевидно, корнями данного уравнения является равенство:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{(-c/5)}$$

При этом если накладывается ограничение на то, что не должно содержаться кратных корней, то $c\neq 0$, так как в противном случае будет $x_{1,2}=0$.

Также подкоренное выражение не должно быть отрицательным, тогда:

$$-c/5>0$$

И тогда:

$$c<0$$

То есть для существования двух вещественных корней, необходимо, чтобы значение параметра лежало в диапазоне $c\in(-\infty, 0)$. На рисунке 1 показана функциональная зависимость $f(x)=5x^2+c$ при различных значениях параметра c .

Рисунок 1. График функции $f(x)=5x^2+c$ при различных значениях параметра c

Из представленных зависимостей видно, что, действительно, парабола пересекает ось аргумента при значениях $c<0$, причем при $c=0$ получается кратный нулевой корень.

Ответ: допустимые значения параметра лежат в диапазоне $c\in(-\infty, 0)$.

Пример 2: определить допустимые значения параметра a , при котором неполное квадратное уравнение имеет вещественные корни:

$$(a-2)x^2-30=0$$

Решение: очевидно, корнями данного уравнения является равенство:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{30/(a-2)}$$

Стоит заметить, что в данной задаче нет ограничения на то, что не должно содержаться кратных корней, однако видно, что при $a=2$ получатся бесконечные корни, а в самом уравнении получится неопределенность вида $0 \cdot \infty$, поэтому имеет смысл отбросить данное значение параметра, то есть $a \neq 2$. При этом по-прежнему подкоренное выражение не должно быть отрицательным, тогда:

$$30/(a-2) > 0$$

И тогда:

$$a > 2$$

То есть для существования двух вещественных корней, необходимо, чтобы значение параметра лежало в диапазоне $a \in (2, +\infty)$. На рисунке 2 показана функциональная зависимость $f(x) = (a-2)x^2 - 30$ при различных значениях параметра a .

Рисунок 2. График функции $f(x) = (a-2)x^2 - 30$ при различных значениях параметра a

Из представленных зависимостей видно, что, действительно, парабола пересекает ось аргумента при значениях $a > 2$, причем кратный корень получается при стремлении $a \rightarrow +\infty$.

Ответ: допустимые значения параметра лежат в диапазоне $a \in (2, +\infty)$.

Книга одного автора

1. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа, том 1 [текст]: учебник для студентов. – М.: Наука, 1968. – 440 с.
2. Фалилеева, М. В. Первые шаги в решении уравнений и неравенств с параметром [текст]: учебное пособие. – КФУ, Казань, 2014. – 111 с.
3. Аксенов, А. П. Математический анализ, часть 1 [текст]: учебник и практикум. – М.: Юрайт, 2023. – 342 с.
4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [текст]: учебное пособие. – М.: МГУ, Москва, 1997. – 555 с.

Книга двух авторов

1. Корн, Г., Корн, Т. Справочник по математике [текст]: учебник для студентов. – М.: Наука, 1973. – 831 с.

Интернет-ресурс

1. MATLAB documentation. – URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/> [интернет-ресурс]

Эта часть работы выложена в ознакомительных целях. Если вы хотите получить работу полностью, то приобретите ее воспользовавшись формой заказа на странице с готовой работой:

<https://stuservis.ru/kursovaya-rabota/344902>