**Тип работы:** Курсовая работа

**Предмет:** Математический анализ



Если x и y рассматривать как декартовы координаты на плоскости, то действительная функция y=f(x) действительного переменного x часто изображается кривой (графиком функции y от x).
Функция может быть определена таблицей своих значений или правилом вычисления такой таблицы с помощью известных операций (конструктивные определения). Функция может быть определена неявно или с помощью определяющих свойств, описываемых функциональными, дифференциальными или интегральными уравнениями, экстремальными свойствами, поведением при некоторых значениях аргумента и т.д. Каждое неконструктивное определение нуждается в доказательстве существования, устанавливающем, что функция, обладающая указанными свойствами, существует.
В данном случае речь идет о квадратичных уравнениях и неравенствах, а, стало быть, и о соответствующих функциональных зависимостях. Понятие функции здесь затронуто не зря, так как в том числе благодаря данному математическому аппарату будет осуществляться решение задач.
В таком случае уместно поговорить о виде квадратного уравнения и некоторых его свойствах.
Квадратное уравнение может быть записано в виде квадратного трехчлена:
$f(x)=ax^2+bx+c, a\neq0,$
где x – неизвестная переменная (либо корень уравнения), a,b,c – параметры уравнения.
Примечательно, что задано условие $a\neq0$, в противном случае квадратное уравнение вырождается в линейное. При этом данный вид уравнения является полным, в то время как существуют частные случаи неполного квадратного уравнения, когда b=0 или c=0, или b=c=0:
$$\begin{cases} ax^2+bx=0, \text{если } c=0 \\ ax^2+c=0, \text{если } b=0 \\ ax^2=0, \text{если } b=0 \text{ и } c=0 \end{cases}.$$
Известно, что квадратное уравнение в общем случае имеет два корня. В первом случае неполного квадратного уравнения первый корень очевиден и равен нулю, в то время как второй корень определяется соотношением входящих в него параметров:
$ax^2+bx=0$
$x(ax+b)=0$
$x_1=0, x_2=-b/a$
Как видно, в данном случае не существует каких-либо ограничений на значения параметров уравнения.
Во втором случае неполного квадратного уравнения будет одинаковые по модулю, но противоположные по знаку корни.:
$ax^2+c=0$
$x_{1,2}=\pm\sqrt{-c/a}$
Как видно, сюда напрашивается естественное условие неотрицательности подкоренного выражения. Поэтому здесь уже уместно говорить об области наплоскости параметров, удовлетворяющей решению данного уравнения.
Третий случай, как и первый, не представляет интереса в силу очевидности нулевого кратного корня.

Фактически это парабола с максимумом или минимумов (в зависимости от знака параметра a) в нуле.
$ax^2=0$
$x_{1,2}=0$
Наконец наиболее общим типом квадратного уравнения является полное квадратное уравнение и неравенство. Известно, что для существования корней уравнения необходимо, чтобы дискриминант был неотрицательным.
Если дискриминант $D=b^2-4ac>0$, то существует два различных вещественных корня;
В таком случае корни уравнения находятся по формуле:
$x_{1,2}=(-b\pm\sqrt{D})/2a$
Если дискриминант $D=b^2-4ac=0$, то существует два одинаковых корня (кратный корень);
В таком случае корни уравнения находятся по формуле:
$x_{1,2}=(-b)/2a$
Если дискриминант $D=b^2-4ac0$, то корней в вещественном поле чисел не существует;
Также ясно, что параметризованным может быть число перед любой степенью уравнения, то есть либо a, либо b, либо c, либо их комбинации.
Отсюда становится еще более интересным наблюдение о всевозможных значениях параметров a,b и c.
Тогда речь идет уже не об области в плоскости параметров, а о трехмерном пространстве с осями a,b и c.
Применительно к неравенствам данная логика также употребима с той лишь разницей, что на первом этапе нужно понять, сочетание каких параметров дает по меньшей мере один вещественный корень, а на втором этапе понять, насколько данный корень (или пара корней) удовлетворяет заданному неравенству.
Таким образом, в рамках решения практических задач предлагается следующая классификация примеров:
Неполное квадратное уравнение с одним параметром;
Неполное квадратное уравнение с двумя параметрами;
Полное квадратное уравнение с одним параметром;
Решение квадратных уравнений с одним параметром с помощью теоремы Виета;
Полное квадратное уравнение с двумя параметрами;
Полное квадратное уравнение с тремя параметрами;
Полное квадратное неравенство с одним параметром;
Квадратное неравенство с параметром, содержащее модуль.
Решение практических задач
Неполное квадратное уравнение с одним параметром
Пример 1: определить допустимые значения параметра c, при котором неполное квадратное уравнение имеет два вещественных корня:
$5x^2+c=0$
Решение: очевидно, корнями данного уравнения является равенство:
$x_{1,2}=\pm\sqrt{(-c/5)}$
При этом если накладывается ограничение на то, что не должно содержаться кратных корней, то $c\neq0$, так как в противном случае будет $x_{1,2}=0$.
Также подкоренное выражение не должно быть отрицательным, тогда:
$-c/5>0$
И тогда:
c0
То есть для существования двух вещественных корней, необходимо, чтобы значение параметра лежало в диапазоне $c\in(-\infty,0)$. На рисунке 1 показана функциональная зависимость $f(x)=5x^2+c$ при различных значениях параметра c.

Рисунок 1. График функции $f(x)=5x^2+c$ при различных значениях параметра c
Из представленных зависимостей видно, что, действительно, парабола пересекает ось аргумента при значениях c0, причем при c=0 получается кратный нулевой корень.
Ответ: допустимые значения параметра лежат в диапазоне $c\in(-\infty,0)$.

Пример 2: определить допустимые значения параметра a, при котором неполное квадратное уравнение имеет вещественные корни:
$(a-2) x^2-30=0$
Решение: очевидно, корнями данного уравнения является равенство:

$x_{1,2}=\pm\sqrt{30/(a-2)}$
Стоит заметить, что в данной задаче нет ограничения на то, что не должно содержаться кратных корней, однако видно, что при $a=2$ получатся бесконечные корни, а в самом уравнении получится неопределенность вида $0\bullet\infty$, поэтому имеет смысл отбросить данное значение параметра, то есть $a\neq2$. При этом по-прежнему подкоренное выражение не должно быть отрицательным, тогда:
$30/(a-2)>0$
И тогда:
$a>2$
То есть для существования двух вещественных корней, необходимо, чтобы значение параметра лежало в диапазоне $a\in(2,+\infty)$. На рисунке 2 показана функциональная зависимость $f(x)=(a-2)x^2-30$ при различных значениях параметра а.

Рисунок 2. График функции $f(x)=(a-2)x^2-30$ при различных значениях параметра а

Из представленных зависимостей видно, что, действительно, парабола пересекает ось аргумента при значениях $a>2$, причем кратный корень получается при стремлении $a\to+\infty$.
Ответ: допустимые значения параметра лежат в диапазоне $a\in(2,+\infty)$.

Книга одного автора
1. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа, том 1 [текст]: учебник для студентов. – М.: Наука, 1968. – 440 с.
2. Фалилеева, М. В. Первые шаги в решении уравнений и неравенств с параметром[текст]: учебное пособие. – КФУ, Казань, 2014. – 111 с.
3. Аксенов, А. П. Математический анализ, часть 1 [текст]: учебник и практикум. – М.: Юрайт, 2023. – 342 с.
4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [текст]: учебное пособие. – М.: МГУ, Москва, 1997. – 555 с.
Книга двух авторов
1. Корн, Г., Корн, Т. Справочник по математике [текст]: учебник для студентов. – М.: Наука, 1973. – 831 с.
Интернет-ресурс
1. MATLAB documentation. – URL: https://www.mathworks.com/help/matlab/ [интернет-ресурс]