Тип работы: Реферат

Предмет: Высшая математика

Доказательство. Сначала исследуем аддитивную структуру алгебры с делением A.
Как мы видели, у каждого элемента из A есть некоторый минимальный аннулирующий многочлен μa(t), из рассуждений прошлого предложения видно, что он обязательно неприводим.
Так как многчлены мы рассматриваем над полем R, то неприводимые многочлены имеют вид

либо где

μa(t) = t − α,
μa(t) = t2 − 2αt + β, α2 β.

В первом случае a R. Если это не так, то положим b = a α, получим тогда
μb(t) = t2 + (β − α2).
Значит, каждый элемент алгебры A имеет вид α + y, где α ∈ R, y = 0
или y2 = γ 0, γ ∈ R.

Для дальнейшего доказательства нам понадобится лемма.

Лемма 1. Подмножество
A′ = {u ∈ A | u2 ∈ R, u2 ≤ 0}
является векторным подпространством в A.

Теперь мы можем перейти к доказательству самой теоремы. Для u ∈ A′ запишем

где q(u) ∈ R+.

u2 = −q(u),

Кроме того, q(u) = 0 ⇔ u = 0. Очевидно, что
q(αu) = α2q(u)
и
f (u, v) := q(u + v) − q(u) − q(v) = −(uv + vu)
— симметричная билинейная форма на A, отвечающая положительно определенной квадратичной форме q.

Если A = R, то рассуждения заканчиваются.

Пусть A ≠ R. Тогда A′ 0 и мы можем выбрать вектор i ∈ A, для
которого q(i) = 1, т.е. i2 = 1.
С точностью до изоморфизма получаем равенство
R[i] = C = R + Ri.
Если A = C, то наши рассуждения заканчиваются.

Теперь предположим, что A — шире, чем комплексные числа (как мы видели, мы можем считать, что C A).
В этом случае A′ — шире, чем Ri, поэтому можно выбрать элемент
$j \perp Ri$, $q(j) = 1$.
В этом случае $j2 = -1$ и $ij + ji = -f(i, j) = 0$, т.е. $ij = -ji$. Полагая
$k = ij$, получим $k2 = -1$, $ik + ki = 0 = jk + kj$.

Следовательно, $k \in A'$ и $k \perp i, j$. Значит, 1, i, j, k линейно независимы

$R + Ri + Rj + Rk = H$
— алгебра кватернионов.

Если A шире, чем алгебра кватернионов, то существует $l \in A'$ такое, что $q(l) = 1$ и $l \perp i, j, k$. Другими словами,
$li = -il$, $lj = -jl$, $lk = -kl$.
Однако в силу ассоциативности умножения в A первые два соотношения дают
$lk = l(ij) = (li)j = -(il)j = -i(lj) = i(jl) = (ij)l = kl$.
Получается противоречие. Значит,
$A = H$.

-