Тип работы: Ответы на билеты

Предмет: Линейная алгебра

-

20. Теорема о числе векторов, входящих в базис. Ранг системы векто-ров.

Теорема . О числе векторов, входящих в базис. Любой базис системы векторов содержит одно и то же число векторов.
Число векторов, входящих в базис системы векторов, называется ран-гом системы векторов и обозначается буквой r.
Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система векторов имеет два базиса. Базис содержит m векторов, а базис содержит k векторов. Каждый из базисов представляет линейно независимую систему векторов и векторы каждого базиса разла-гаются по векторам другого базиса. Поэтому по предыдущей теореме 3.3
m ≤ k и k ≤ m.
Следовательно, m = k.

21. Теорема о двух системах векторов, которым соответствуют равно-сильные системы уравнений. Алгоритм нахождения базиса.

Теорема . О двух системах векторов, которым соответствуют равно-сильные системы уравнений.
Если двум системам векторов
, (1)
(2)
соответствуют равносильные системы уравнений
, (3)
, (4)
и векторы образуют базис системы (2), то соответствующие векторы образуют базис системы (1) и при этом разложения соответствующих векторов систем по своим базисам совпадают, т. е. если
(j = r + 1, 2, …, n), то
(j = r + 1, 2, …, n).
Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ( ) базис системы векто-ров (2). Покажем, что соответствующие этим векторам векторы системы (1) также образуют базис. Докажем от противного.
Предположим, что линейно зависимы, т. е. существует ненуле-вой набор чисел , такой, что . Дополним левую часть этого равенства слагаемыми , которые рав-ны нулю. Равенство не нарушится.
.
Это равенство можно рассматривать как условие, подтверждающее то, что система уравнений (3) имеет ненулевое решение (, 0, …, 0).
По условию теоремы системы уравнений (3) и (4) равносильные, т. е. это решение является также решением системы (4). Тогда

или при ненулевом наборе чисел , что возможно только при линейной зависимости векторов . Это противоречит условию теоремы. Следовательно, векторы ли-нейно независимые.
Пусть далее известно разложение
(j = 1, 2, …, n).
Покажем, что с такими же коэффициентами разлагается соответствующий вектор по векторам . Ввиду равносильно-сти систем уравнений (3) и (4) из последнего равенства имеем
.
Отсюда получаем (j = 1, 2, …, n). Следова-тельно, векторы образуют базис первой системы векторов (1); причем коэффициенты разложений соответствующих векторов в системах (1) и (2) по своим базисам совпадают.

22. Теорема Кронекера - Капелли о совместности системы линейных уравнений.

Теорема. Система линейных уравнений совместна тогда и только то-гда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.
- расширенная матрица.
Для определения рангов обеих матриц достаточно привести расши-ренную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобра-зований строк и перестановки столбцов (кроме последнего).
Для совместных систем линейных уравнений верны следующие утвер-ждения:
1) Если ранг матрицы совместной системы равен числу перемен-ных, т.е. r(A) = n, то система уравнений (1) имеет единственное решение.
2) Если ранг матрицы совместной системы меньше числа перемен-ных, т.е. r(A) n, то система (1) неопределенная и имеет беско-нечное множество решений.

Схема исследования системы m уравнений с n неизвестными

Система совместная, Система несовместная
если r(A) = r(B) = r. Если r(A) r(B).
Ответ: нет решений.

Система определена, Система неопределенна,
если r = n. Если r n.
Ответ: единственное решение. Ответ: бесконечное множество решений.

23. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Теорема о числе векторов-решений, входящих в фундамен-тальную систему.
Система m линейных уравнений с n переменными называется системой линейных однородных уравнений, если все их свободные члены равны ну-лю. Такая система имеет вид:
(1)
Определение 1. Система линейно независимых решений e1, e2, …, ek называется фундаментальной, если каждое решение системы (1) является линейной комбинацией решений e1, e2, …, ek .
Теорема 1. Если ранг матрицы системы однородных уравнений r меньше числа неизвестных n, то система уравнений имеет фундаменталь-ную систему решений, состоящую из n r векторов-решений.
Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система записана в виде
.
Если ранг матрицы системы равен r (r(A) = r), то равносильная разре-шенная система уравнений содержит r уравнений и имеет вид
.
Так как n > r, то система имеет n – r свободных неизвестных .
Задав свободным неизвестным значения 0 и 1, можно найти n – r частных решений вида
, , …, .
В этих векторах вместо значений базисных переменных поставлены точки, так как они в данном рассмотрении не имеют значения.
Покажем, что образуют фундаментальную систему реше-ний. Чтобы доказать, что данные векторы являются линейно независимы-ми, составим линейную комбинацию
.
Данная линейная комбинация равна нулевому вектору только при . Это и подтверждает линейную независимость векто-ров.
Покажем, что любое решение системы уравнений яв-ляется линейной комбинацией .
Составим вектор K, являющийся линейной комбинацией векторов с коэффициентами
.
Решения L и K при одних и тех же разрешенных неизвестных имеют оди-наковые свободные неизвестные, следовательно, они совпадают (L = K), т. е.
.

-