Тип работы: Контрольная работа

Предмет: Математика

-

Задача 1
Найти общее решение (или общий интеграл) данных дифференциальных уравнений первого порядка:
А) $(1+x^2)y'=xy+xy^2$
Решение
Делим обе части уравнения на $(1+x^2)$:
$y'=\frac{xy^2+xy}{1+x^2}$
Вынесем множитель x в правой части за скобки:
$y'=\frac{x(y^2+y)}{1+x^2}$
$\frac{dy}{dx}=\frac{x(y^2+y)}{1+x^2}$
Умножим обе части уравнения на дифференциал dx:
$dy=\frac{x(y^2+y)dx}{1+x^2}$
Разделим обе части уравнения на (y^2+y):
$\frac{dy}{(y^2+y)}=\frac{xdx}{1+x^2}$
Проинтегрируем обе части уравнения:
$\int \frac{dy}{(y^2+y)}=\int \frac{xdx}{1+x^2}$
Вычисляем полученные интегралы:
$\ln(y)-\ln(y+1)=\ln(x^2+1)/2+C$
Возведем обе части уравнения в степень:
$\frac{y}{y+1}=e^C\sqrt{x^2+1}$
Отсюда:
$y=-\frac{1}{C\sqrt{x^2+1}-1}-1$

Б) $x^2y'=y^2+xy$
Решение
$\frac{x^2dy}{dx}=y^2+xy$
Умножим обе части уравнения на дифференциал dx:
$x^2dy=(y^2+xy)dx$
Функция M (y;x) однородна, если M (ky;kx) = kn M (y;x). Таким образом,
$k^2x^2=k^2y^2+k^2xy\to k^2$
Сделаем замену:
$u=y/x$
Следовательно, $y=ux$,а $dy=udx+xdu$
Тогда:
$x^2(udx+xdu)=(u^2+u)x^2dx$
Раскрываем скобки:
$ux^2dx+x^3du=u^2x^2dx+ux^2dx$
$x^3du=u^2x^2dx$
Разделим обе части уравнения на u^2x^3:
$\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x}$
Проинтегрируем обе части уравнения
$\int \frac{du}{u^2}=\int dx\frac{1}{x}$
$\frac{1}{u}=C-\ln(x)$
Выполним обратную замену:
$u=y/x$
$\frac{x}{y}=C-\ln(x)$
$y=-\frac{x}{\ln(x)+C}$

В) $y'+2\frac{y}{x}=x^2+2x$

Решение

Данное уравнение представляет собой уравнение первого порядка вида

$y'+a(x)y=b(x)$,

Где

$a=\frac{2}{x}, b=x^2+2x$

Применим метод Бернулли (введение двух функций)

$y=uv$,

$y'=uv'+u'v$

Тогда:

$uv'+u'v+\frac{2uv}{x}=x^2+2x$

Сгруппируем:

$u'v+u\left(v'+\frac{2v}{x}\right)=x^2+2x$

Решим первое уравнение

$v'+\frac{2v}{x}=0$

$v'=-\frac{2v}{x}$

$\frac{dv}{dx}=-\frac{2v}{x}$

Умножим обе части уравнения на дифференциал dx:

$dv=-\frac{2v\,dx}{x}$

Разделим обе части уравнения на v:

$\frac{dv}{v}=-\frac{2dx}{x}$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$\int \frac{dv}{v}=-\int \frac{2dx}{x}$

$\ln(v)=-2\ln(x)$

Возведем обе части уравнения в степень:

$v=\frac{1}{x^2}$

Решим второе уравнение:

$u'v+u\left(v'+\frac{2v}{x}\right)=x^2+2x$

При

$v=\frac{1}{x^2}$ и $v'+\frac{2v}{x}=0$

$\frac{u}{x^2}=x^2+2x$

Умножим обе части уравнения на x2:

$u=x^4+2x^3$

$\frac{du}{dx}=x^4+2x^3$

Умножим обе части уравнения на дифференциал dx:

$du=(x^4+2x^3)dx$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$\int 1\,du=\int (x^4+2x^3)dx$

$u=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+C$

Выполним обратную замену:

$u=\frac{y}{v}$ $v=\frac{1}{x^2}$

$y=\frac{2x^5+5x^4+10C}{10x^2}$

Отсюда:

$y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+\frac{C}{x^2}$

Задача 2

Найти частное решение дифференциального уравнения

$y'+xy=2xe^{-x^2/2}y^2$

удовлетворяющее начальному условию

$y(0)=1$

Решение

Запишем данное уравнение в следующем виде:

$y'+xy=\frac{2xy^2}{e^{x^2/2}}$

Данное уравнение представляет собой уравнение Бернулли вида

$y^{'}+a(x)y=b(x)\ y^n$,
Где
$a=x, b=2x/e^{(x^2/2)}, n=2$
Разделим обе части уравнения на y2:
$y'/y^2 + x/y = 2x/e^{(x^2/2)}$
Сделаем замену:

-