

Эта часть работы выложена в ознакомительных целях. Если вы хотите получить работу полностью, то приобретите ее воспользовавшись формой заказа на странице с готовой работой:

<https://stuservis.ru/kursovaya-rabota/421539>

Тип работы: Курсовая работа

Предмет: Высшая математика

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	2
Глава 1: Основы теории экстремумов	
1.1 Введение в экстремумы функций одной переменной.....	3
1.2 Методы нахождения экстремумов	6
1.3 Графический метод определения экстремумов	9
1.4 Достаточные условия экстремума	11
Глава 2: Применение к решению задач	
2.1 Оптимизация функций в прикладных задачах Лагранжа	13
2.2 Решение задач с теоремой	17
2.3 Практические задачи и упражнения	21
2.4 Практические задачи и методы решения	27
Заключение	30
Список литературы	31

Исследование экстремальных задач в математике имеет древние корни, начавшееся примерно 2500 лет назад. Однако, лишь в течение последних трех столетий были разработаны общие методы их решения. С развитием вариационного исчисления появилась теория, специализированная для определенного класса задач. С появлением новых потребностей в экономике и технике возникла необходимость в решении задач, которые не поддавались традиционным методам. Это привело к развитию теории оптимального управления. Основы этой теории были заложены в 50-60-е годы Л.С. Понтрягиным и его коллегами, которые сформулировали новые необходимые условия экстремума и ввели ограничения на управляющие воздействия.

Появление монографий, посвященных теории оптимального управления, подчеркнуло ее практическую значимость. Принцип максимума Понтрягина и развитие вариационного исчисления для задач с ограничениями привели к новым достижениям, включая уравнение Эйлера для общей задачи оптимального управления, разработанное А.А. Милютином.

Исследования нерегулярных смешанных ограничений, таких как задачи входа аппарата в атмосферу, выдвинули на первый план сложные задачи управления. Надежды Д. Гильберта на прогресс в оптимизационных задачах нашли отражение в современных методах оптимизации, среди которых гармонический поиск, искусственные иммунные системы, гравитационный поиск и разбросанный поиск, развивающиеся на фоне возрастающего интереса к этой области математики.

Глава 1: Основы теории экстремумов

1.1 Введение в экстремумы функций одной переменной

Классической задачи на условный экстремум

В области математического анализа и прикладной математики задачи оптимизации играют центральную роль, особенно когда речь идет о функциях нескольких переменных (ФНП). Эти задачи находят широкое применение в инженерии, экономике, физике и многих других областях, где требуется оптимизация параметров для достижения определенных целей. В этом контексте особый интерес представляют задачи на условный экстремум, где необходимо найти максимальные или минимальные значения функции при наличии одного или нескольких ограничений. В данной статье мы рассмотрим ключевые аспекты этих задач, включая методы их решения, необходимые и достаточные условия экстремума, а также примеры их применения.

Регулярная Задача на Условный Экстремум

В регулярной задаче на условный экстремум ограничения удовлетворяют определенным условиям регулярности, что позволяет использовать метод множителей Лагранжа. Этот метод является мощным инструментом для нахождения экстремальных значений функции, когда переменные не являются

независимыми, а связаны уравнением или системой уравнений связи. Функция Лагранжа $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ объединяет исходную функцию $f(x)$ и уравнения связи $g(x) = 0$, где λ — множитель Лагранжа, вводимый для каждого ограничения.

Необходимое Условие Экстремума

Необходимым условием для существования экстремума функции при заданных ограничениях является равенство нулю всех частных производных функции Лагранжа по всем переменным и множителям Лагранжа. Это условие можно геометрически интерпретировать: в точке экстремума уровневая кривая функции $f(x, y)$ должна касаться кривой связи $g(x, y) = 0$, при этом градиенты обеих функций должны быть коллинеарны.

Достаточные Условия Экстремума

Для того чтобы определить характер точки экстремума (максимум, минимум или седловая точка), применяются достаточные условия, основанные на вторых производных функции Лагранжа. Анализ вторых производных позволяет установить знак определителя матрицы вторых производных (гессиана), что дает информацию о характере экстремума.

Примеры Применения

Примеры применения метода множителей Лагранжа включают оптимизацию производственных процессов, минимизацию затрат, оптимизацию распределения ресурсов и многие другие задачи. Один из классических примеров — задача о нахождении прямоугольника максимальной площади при заданном периметре. Используя метод Лагранжа, можно показать, что прямоугольник с максимальной площадью является квадратом.

Сложности и Особенности

Однако не все задачи на условный экстремум могут быть решены с помощью метода Лагранжа. В случае нерегулярных задач, когда ограничения не удовлетворяют условиям регулярности, требуются альтернативные подходы. К таким подходам относятся прямое исследование ограничений или модификации метода Лагранжа, адаптированные для работы с нерегулярными условиями. Важно также отметить, что в некоторых случаях определение достаточных условий требует дополнительного анализа, который может включать исследование высших производных или применение других математических инструментов. Нерегулярная задача на условный экстремум описывает ситуацию, когда стандартные условия регулярности, необходимые для применения метода множителей Лагранжа, не выполняются. В таких случаях решение задачи требует альтернативных подходов, которые могут включать прямое исследование ограничений или использование модифицированных версий метода Лагранжа, способных справиться с нерегулярными ограничениями.

1.2 Методы нахождения экстремумов

У нас есть функция $f(x) = x^2 - 4x + 5$, и нам нужно найти ее экстремумы на интервале $[0, 3]$.

Нахождение производной:

Вычислим производную функции $f(x)$ по переменной x :

$$f'(x) = 2x - 4$$

Нахождение критических точек:

Решим уравнение $f'(x) = 0$, чтобы найти точки, где производная равна нулю:

$$2x - 4 = 0$$

$$x = 2$$

Проверка наличия экстремумов:

Для определения характера экстремума (минимума или максимума) используем вторую производную теоремы о максимуме и минимуме.

Вычислим вторую производную:

$$f''(x) = 2$$

Заметим, что $f''(x)$ положительна для всех значений x , что означает, что точка $x = 2$ является точкой минимума.

Теорема о максимуме и минимуме функции одной переменной: Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$ и дифференцируема на открытом интервале (a, b) , то: Если для всех x из интервала (a, b) производная $f'(x)$ положительна, то $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Если для всех x из интервала (a, b) производная $f'(x)$ отрицательна, то $f(x)$ убывает на этом

интервале.

- 1) Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов. - М.: Высш. шк., 1986.
- 2) Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченкова Н. П. Вычислительные методы для инженеров. - М.: Мир, 1998.
- 3) Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. Г. Численные методы. - 8-е изд.. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000.
- 4) Бельков В.Н., Ланшаков В.Л. Автоматизированное проектирование технических систем: Учебное пособие - Москва: Академия Естествознания, 2009.
- 5) Волков Е. А. Численные методы. - М.: Физматлит, 2003.
- 6) Васильев Н.Б. Заочные математические олимпиады. -М.: Наука,1986.
- 7) Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. Пер. с англ. -М.: Мир, 1985.
- 8) Готман Э.Г., Скопец З.А. Решение геометрических задач аналитическим методом -М.: Просвещение, 1979 .
- 9) Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1970. - С. 575-576.
- 10) Канатников А.Н., Крищенко А.П. Функции нескольких переменных. Конспект лекции. - МГТУ им. Н.Э. Баумана - С. 62-69
- 11) Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.
- 12) Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начала анализа.- М.: Просвещение, 1990
- 13) Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике.-М.: Просвещение,1991
- 14) Мочалин А.А. Сборник задач по математике.- Саратов, Лицей, 1998.
- 15) Рубан А. И. Методы оптимизации : учеб. пособие. Изд. 2-е, испр. и доп. Красноярск : Изд-во НИИ ИПУ, 2001.

Эта часть работы выложена в ознакомительных целях. Если вы хотите получить работу полностью, то приобретите ее воспользовавшись формой заказа на странице с готовой работой:

<https://stuservis.ru/kurovaya-rabota/421539>