Тип работы: Курсовая работа

Предмет: Математический анализ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ
Применение кватернионов при описании углового движения твердого тела, несмотря на значительную потерю наглядности при интерпретации результатов исследований, имеет ряд преимуществ по сравнению с угловыми переменными. В основном эти преимущества связаны с линейностью соответствующих кинематических уравнений и отсутствием особых положений тела, при которых кинематические уравнения вырождаются. Такими же преимуществами обладают направляющие косинусы осей, связанных с твердым телом. Вместе с тем соответствующие им уравнения Пуассона обладают значительной избыточностью по числу непосредственно определяемых элементов ортогональных матриц и необходимостью контролировать выполнение шести условий ортонормированности векторов связанного базиса. Кватернионы в этом смысле гораздо экономичнее. Интерес к практическому применению кватернионов возрос в связи с необходимостью разнообразного управления движением искусственных небесных тел около центра масс для различных проектов освоения космического пространства. Большую роль в популяризации идеи использования кватернионов сыграла книга [1], в которой отражены основные аспекты алгебры кватернионов применительно к практическим задачам исследования углового движения твердых тел. Много задач динамики космического полета в кватернионной постановке рассмотрено в книге [2] и в большом числе научных статей других авторов.

КВАТЕРНИОНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
В XXI веке активно развиваются нанотехнологии, которые объединяют в себе разные науки. Ученые пытаются найти новые способы решения вечных проблем человечества, обращаясь для этого к забытым темам. Часто оказывается, что непризнанные и невостребованные ранее теории, находят новые применения и становятся важной частью современной науки.
Цель исследования: изучить кватернионы и их применение с точки зрения современной науки и доказать, что в XIX веке их не могли оценить по достоинству.
Задачи исследования:
- знакомство с множеством гиперкомплексных чисел и их свойствами; - изучение кватернионов как одного из видов гиперкомплексных чисел (история открытия, операции, свойства);
- изучение применения кватернионов в различных научных сферах; - доказательство недооценки кватернионов в XIX веке.
Предмет исследования: кватернионы, как вид гиперкомплексных чисел. Гипотеза: В отличие от XIX века, в современном мире кватернионы нашли много новых применений в различных областях наук. Обратимся к понятию комплексных чисел. Комплексные числа—расширение множества вещественных чисел, обычно обозначается C. Любое комплексное число может быть представлено как формальная сумма x + iy, где x и y -вещественные числа, i—мнимая единица. Ученые пытались найти такие числа, чтобы обычные арифметические действия над такими числами одновременно выражали некоторые геометрические процессы в многомерном пространстве или давали количественное описание каких-либо физических законов. Эти поиски привели к открытию гиперкомплексных чисел. Гиперкомплексные числа, обобщение понятия о числе, более широкое, чем обычные комплексные числа. Другое определение гласит: Гиперкомплексные числа —это конечномерные алгебры над полем вещественных чисел. Свойства гиперкомплексных чисел: 1) Подобно тому, как комплексные числа могут быть рассмотрены как точки на плоскости, гиперкомплексные числа могут быть рассмотрены как точки в некотором многомерном

евклидовом пространстве. 2) За исключением комплексных чисел, никакие из этих расширений не образуют поля. 3) Согласно теореме Фробениуса, единственные гиперкомплексные числа, для которых можно ввести деление (т.е. без делителей нуля) —комплексные числа, числа Кэли и кватернионы.
Для того, чтобы использовать гиперкомплексные числа, надо в первую очередь установить правила арифметических действий над ними. Сложение и вычитание гиперкомплексных чисел получают однозначное определение, если для новых чисел сохранить обычные правила арифметики; именно, компоненты x1, x2,..., xn "базисных единиц" должны соответственно складываться или вычитаться. Истинное значение проблемы отчётливо выступает только при установлении правила умножения; для установления почленного перемножения гиперкомплексных чисел вида x1 e1+ + x2e2 +... + xnen (*) приходят к необходимости установить значения n2 произведений ei ek (i = 1, 2,..., n; k = 1, 2,..., n). Задача состоит в том, чтобы этим произведениям приписать значения вид x1 e1 + x2 e2 +... + xnen, сохраняющие в силе все обычные правила арифметических операций. Важнейшая система гиперкомплексных чисел - кватернионы—получается при отказе от коммутативности (переместительности) умножения и сохранения остальных свойств сложения и умножения чисел. Кватернионы-это четверки действительных чисел (x; y; u; v), которые удобно записывать в виде q = x + yi + uj + vk, где i, j, k–новые числа, являющиеся аналогом мнимой единицы в комплексных числах. Требуется, чтобы числа i, j, k
удовлетворяли следующим соотношениям:
i2 = j2 = k2 = -1, ij = -ji = k, (1)
jk = - kj, ik = - ki, (2)
которые удобно записать в виде “таблицы умножения” например, ij= k, а ji= -k. По определению операции сложения и умножения кватернионов производятся по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов с учетом правил (1) и (2). Перейдем теперь к операции деления кватернионов, обратной к операции умножения. Оказывается, определенные им новые числа –кватернионы –потеряли еще одно привычное качество: произведение кватернионов зависит от порядка сомножителей. Построение кватернионов. Так же как комплексные числа разлагаются в сумму своей действительной и мнимой частей, кватернион тоже можно разложить в сумму q = x + (yi + uj + vk). Первое слагаемое в этом разложении называется скалярной частью кватерниона, а второе –векторной частью. Скалярная часть x–это просто действительное число, а векторная часть может быть изображена вектором r = yi + uj + vk в трехмерном пространстве, где i, j, k мы теперь рассматриваем как единичные вектора прямоугольной системы координат. Таким образом, каждый кватернион q представляется в виде суммы q = x + r, где x –скалярная часть кватерниона q, а r –векторная часть. Если r = 0, то q = x и кватернион q называется скалярным кватернионом. Если же x = 0, то q = r и q называется векторным кватернионом.
Применения кватернионов:
1) Применение кватернионов для описания движения манипулятора. С точки зрения механики манипулятор представляет собой систему твердых (или упругих) тел, связанных между собой посредством соединений с различными типами связей. В общем случае звенья манипулятора совершают в пространстве сложное движение, которое обычно рассматривают как совокупность поступательного движения некоторой точки тела, принятой за полюс, и углового (вращательного) движения вокруг полюса. Таким образом, движение тела в пространстве относительно базовой системы координат считается заданным, если в произвольный момент времени заданы шесть его координат: три координаты полюса плюс три координаты, определяющие угловое положение тела.

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука. 1973. — 320 с.
2. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. — М.: Физматлит, 2006. — 512 с.
3. Голубев Ю.Ф. Тождественность параметров Эйлера и Кэли-Клейна в кинематике абсолютно твердого тела. Изв. РАН: МТТ № 1, 1999, с. 19-25.
4. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. Учебник. 2-е изд., перераб. и дополн. — М.: Изд-во МГУ, 2000. — 719 с.
5. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. Изд. 2-е, перераб. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Наука. 1979, 760 с.