**Тип работы:** Контрольная работа

**Предмет:** Математика



РАЗДЕЛ I МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Вычислить пределы, не применяя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}=[0/0]=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{2(x-1)(x-5/2)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2x-5}=\frac{0}{-3}=0$

б) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x^2}{2x^3-4x^2+5}=[\infty/\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(4+7/x)}{x^3(2-4/x+5/x^3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+7/x}{2-4/x+5/x^3}=\frac{4+0}{2-0+0}=\frac{4}{2}=2$

в) $\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}=[0/0]=\lim_{x\to-4}\frac{(\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x})(\sqrt{x+12}+\sqrt{4-x})}{(x-2)(x+4)(\sqrt{x+12}+\sqrt{4-x})}=$

$=\lim_{x\to-4}\frac{(x+12)-(4-x)}{(x-2)(x+4)(\sqrt{x+12}+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to-4}\frac{2(x+4)}{(x-2)(x+4)(\sqrt{x+12}+\sqrt{4-x})}=$

$=\lim_{x\to-4}\frac{2}{(x-2)(\sqrt{x+12}+\sqrt{4-x})}=\frac{2}{-6(\sqrt8+\sqrt8)}=-\frac{1}{6\sqrt8}=-\frac{1}{12\sqrt2}=-\frac{\sqrt2}{24}$

г) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-1)+2}{2x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{x+2}=$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{x}\left(\frac{2}{2x-1}\right)(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{x}}\right)^{\left(\frac{2}{2x-1}\right)(x+2)}=$

$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2x+4}{2x-1}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{2x-1}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2+4/x}{2-1/x}}=e^1=e$

Исследовать на непрерывность функцию и построить её график:

$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{при } x\le0\\ (x+1)^2 & \text{при } 02\end{cases}$

Найдем односторонние пределы функции:

$\lim_{x\to0-}(x+1)=(0-)+1=1$

$\lim_{x\to0+}(x+1)^2=((0+)+1)^2=1$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)=1$

Так как в точке $x=0$ функция имеет конечные пределы, равные между собой и равные значению функции в этой точке, то функция непрерывна в этой точке $x=0$.

$\lim_{x\to2-}(x+1)^2=((2-)+1)^2=9$

$\lim_{x\to2+}(-x+4)=-(2+)+4=2$

$\lim_{x\to2-}f(x)\ne\lim_{x\to2+}f(x):9\ne2$

Так как в точке $x=2$ функция имеет конечные пределы, не равные между собой, то функция $f(x)$ в этой точке имеет неустранимый разрыв I рода.

3. Найти производную функции:

а) $y=121-7e^x-1/x+2\sqrt{x}+2\arccos x$

$y'=(121-7e^x-1/x+2\sqrt{x}+2\arccos x)'=$

$=(121)'-(7e^x)'-(1/x)'+(2\sqrt{x})'+(2\arccos x)'=0-7e^x+1/x^2+2/\sqrt{x}-2/\sqrt{1-x^2}$

б) $y=(x^4+x)\cdot1/x$

$y'=(x^4+x)'\cdot1/x+(x^4+x)\cdot(1/x)'=((x^4)'+(x)')\cdot1/x+(x^4+x)\cdot(x^{-1})'=$

$=(4x^3+1)\cdot1/x+(x^4+x)\cdot(-1/x^2)=4x^2+1/x-x^2-1/x=3x^2$

в) $y=\frac{x^2}{5+x}$
$y'=\frac{(x^2)'(5+x)-x^2(5+x)'}{(5+x)^2}=\frac{2x(5+x)-x^2\cdot 1}{(5+x)^2}=\frac{x^2+10x}{(5+x)^2}=\frac{x(x+10)}{(5+x)^2}$

4. Исследовать функцию с помощью производной и построить ее график:
$y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$
1) Область определения функции: $x-1\neq 0$  $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

2) Четность / нечетность функции:
$y(-x)=\frac{(-x)^2-(-x)+1}{(-x)-1}=-\frac{x^2+x+1}{x+1}\neq -y(x)\neq y(x)$
Следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. функция общего вида.

3) Функция не является периодической.

4) Точки пересечения графика функции с осями координат:
Пересечение с осью 0Y: $x=0$, $y(0)=\frac{0^2-0+1}{0-1}=-1$
Пересечение с осью 0X: $y=0$: $\frac{x^2-x+1}{x-1}=0$  $\begin{cases} x^2-x+1=0 \\ x-1\neq 0 \end{cases}$  пересечений нет, т.к. уравнение $x^2-x+1=0$ не имеет решения (дискриминант 0)

5) Асимптоты графика функции:
Уравнения наклонных асимптот ищут в виде $y=kx+b$.
По определению асимптоты:
Находим коэффициент kпо формуле:

Находим коэффициент b по формуле:

Следовательно, уравнение наклонной асимптоты можно записать в виде: $y=x$
Найдем вертикальные асимптоты, функция имеет точку разрыва $x=1$:
Находим односторонние переделы в точке $x=1$:
;
Следовательно, точка $x=1$ – точка разрыва II рода и является вертикальной асимптотой.

6) Находим интервалы монотонности и точки экстремума функции $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$:
$y'=\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)'=\frac{(x^2-x+1)'(x-1)-(x^2-x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$
Находим стационарные точки:
$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0$  $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x\neq 1 \end{cases}$
Определяем интервалы монотонности и точки экстремума
x (-∞ ;0) 0 (0; 1) 1 (1; 2) 2 (2; +∞)
y^' y^'>0 т. max y^'0 – y^'0 т. min y^'>00
y функция  -1 функция  – функция  3 функция 

В окрестности точки $x = 0$ производная функции меняет знак с (+) на (-). Следовательно, точка $x = 0$ – точка максимума. В окрестности точки $x = 2$ производная функции меняет знак с (-) на (+). Следовательно, точка $x = 2$ – точка минимума.
7) Находим интервалы выпуклости / вогнутости и точки перегиба функции $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$:
$y''=\left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(x^2-2x)'(x-1)^2-(x^2-2x)((x-1)^2)'}{(x-1)^4}=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x^2-2x)(x-1)}{(x-1)^4}=$
$=\frac{(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x)}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}$
Находим стационарные точки:
$\frac{2}{(x-1)^3}=0$  $\{x\neq 1$
Определяем интервалы выпуклости / вогнутости и точки перегиба:
x (-∞ ;1) 1 (1; +∞)
y^'' y^''0 – y^''>0
y функция выпукла – функция вогнута

8) Строим график функции:

5. Найти неопределенный интеграл:

а) $\int (3^x+12\cos x-24)dx=3^x/\ln 3 ++12\sin x-24x+C$

б) $\int \sin(3-2x)dx = \left|\begin{matrix}3-2x=t\\ -2dx=dt;\ x=-1/2\ dt\end{matrix}\right| = \int -1/2\sin t\ dt = -1/2\cos t+C=$
$=1/2\cos(3-2x)+C$

в) $\int x\cos x\ dx = \left|\begin{matrix}u=x; du=dx\\ dv=\cos x\ dx;\ v=\sin x\end{matrix}\right| = x\bullet\sin x-\int \sin x\ dx=$
$=x\bullet\sin x+\cos x+C$

6. Вычислит определенный интеграл:

1. Натанзон С.М. Краткий курс математического анализа. – М.: МЦНМО, 2004. – 96 с.
2. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 352 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987.
4. Математический анализ в примерах и задачах. Часть 1 / С.Н. Веричев, Г.Б. Корабельникова, В.Н. Максименко и др.; Под ред. В.Н. Максименко: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002 г. – 140 с.
5. Т.В. Родина, Е.С. Трифанова Курс лекций по математическому анализу - (для напр. «Прикладная математика и информатика»). Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. –183с