Тип работы: Магистерская работа

Предмет: Механика

Оглавление

получить строгие решения для некоторых типов мелких и глубоких выточек и отверстий с криволинейным контуром в условиях плоской упругой задачи при растяжении, чистом сдвиге и чистом изгибе. Нейбер Г. дал точное решение бигармонического уравнения по отношению к выточке на плоской детали [11]. Он показал, что наибольшие напряжения в пластине с выточкой возникают у дна выточки и их величина определяется по выражению:
, (7)
где - расстояние от центра пластины до дна выточки (см. рис. 3);
- радиус кривизны выточки.

Рис. 3. Пластина с выточкой, нагруженная напряжением в направлении оси X
Темой настоящей работы является изучение вопросов распределения напряжений и деформаций в пластинах, ослабленных группами вырезов различной формы. Эти вопросы нашли решение в работах Савина Г.Н. [5, 10], Космодамианского А.С. [12], Шермана Д.И. и других ученых.
Савин Н.Г. в работе [5] определил распределение напряжений в изотропной пластине, нагруженной одноосной нагрузкой для идеально упругого материала. Им рассмотрена концентрация напряжений в пластине, содержащих два, три и бесконечное количество круговых отверстий. Было определено влияние количества отверстий и расстояния между ними на концентрацию напряжений. При этом установлено, что существенное влияние отверстий друг на друга появляется тогда, когда расстояние между ними меньше диаметра одного из них.
При растяжении пластины вдоль линии центров отверстий концентрация медленно убывает при сближении отверстий, причем степень убывания возрастает с увеличением количества отверстий. Если пластина растягивается поперек линии центров отверстий наблюдается обратная картина: при сближении отверстий концентрация напряжений растет, причем тем быстрее, чем больше имеется отверстий.

Было рассмотрено растяжение пластины с двумя неодинаковыми по размеру отверстиями, центры которых расположены на одной оси, совпадающей с осью X (рис. 4).

Рис. 4. Схема одноосного растяжения двух отверстий неодинакового размера

Расстояние между контурами отверстий равны , а между центрами отверстий – l. Радиус малого отверстия , большого . Контур большого отверстия обозначен , малого - . Исследование напряженного состояния в плоскости, ослабленной двумя неодинаковыми отверстиями показало, что наибольший интерес представляет окружное напряжение, действующее по контуру малого отверстия . Что касается распределения напряжений вблизи большого отверстия, то оно получается примерно таким же, как при растяжении пластины с одним отверстием (малое отверстие незначительно влияет на изменение напряженного состояния вблизи большого отверстия).
При растяжении пластины поперек линии центров отверстий напряжение в точках A при , B при , и C при равно:
(8)
, (9)
(10)
В уравнениях 6, 7, 8 - отношение радиуса малого отверстия к расстоянию между отверстиями.
При растяжении пластины вдоль линии центров отверстий напряжения в тех же точках малого отверстия будут:
(11)
(12)
(13)

2. Численные методы решения задач теории упругости

Численные методы до появления вычислительных машин с большой памятью и быстродействием не привлекали инженеров из-за большого объема рутинных расчетов, не имеющих практического значения. Картина изменилась с появлением вычислительных машин, которые способны быстро и точно выполнять расчеты численными методами. В настоящее время численные методы расчета задач теории упругости нашли широкое применение. Сегодня задача может считаться решенной, если имеется в распоряжении инженера эффективный численный метод, дающий требуемый результат с достаточной точностью за приемлемый промежуток времени.
К числу наиболее известных численных методов расчета математической физики можно отнести метод конечных разностей, вариационные методы, вариационно-разностный метод и метод конечных элементов. В дальнейшем дано краткое описание перечисленных методов без описания математической базы, на которой они основаны, так как это не является темой настоящей работы.

2.1. Метод конечных разностей

В методе конечных разностей неизвестные функции определяются в узловых точках, а производные заменяются разностными отношениями. Например, в плоской задаче теории упругости изотропного тела определяется не искомая функция из уравнения Эри во всей области решаемой задачи, а ограничиваются поиском значений функции в конечном числе точек. При этом решение дифференциального уравнения сводится к решению системы алгебраических уравнений, в которых неизвестными являются значения искомых функций в ряде точек сетки, накладываемой на исследуемую деталь [8, 13].
Замена производных функций может быть выполнена разными способами. Наиболее распространенным является способ замены производных, входящих в уравнение, линейными комбинациями значений функций в узлах прямоугольной сетки с шагами . Применяя разложение функции в узлах сетки 1-12 в ряд Тейлора в окрестности точки O, можно получить алгебраическое (конечно-разностное) уравнение аппроксимирующее бигармоническое уравнение вблизи точки O для задачи с постоянными параметрами упругости.
Аналогичные уравнения надо написать для всех узлов сетки на исследуемой детали, в результате

получится система конечно-разностных уравнений.
Расчет методом конечных разностей состоит из трех основных этапов: составления уравнений, решения системы полученных уравнений и подсчета напряжений по найденным значениям функции Эри. Все этапы могут быть автоматизированы и успешно выполнены на ЭВМ.
Однако применение данного метода затруднительно для областей сложной формы и со сложными граничными условиями [8]. Применение метода конечных разностей к областям сложной конфигурации связано с индивидуальным подходом к каждой из них, что лишает этот метод преимущества перед другими численными методами. В этом смысле большими преимуществами обладает вариационно-разностный метод и метод конечных элементов, связанные с классическими вариационными методами расчета конструкций.

2.2. Вариационные методы

Основа вариационного метода применительно к задачам теории упругости достаточно полно разработана в работах Папковича П.Ф. и Лейбензона Л.С. [14]. В вариационной постановке задача расчета упругой системы трактуется как задача отыскания минимума энергии – функции перемещений (если решение ведется в перемещениях) или напряжений (если решение ведется в напряжениях).
В первом методе, основанном на принципе минимума перемещений (принцип Лагранжа), минимизируется полная энергия. Второй вариационный метод связан с вариацией напряжений и основан на принципе минимума напряжений – принцип Кастельяно. Основные трудности этого метода вызывает выбор аппроксимирующих функций, обойти которые позволяет вариационно-разностный метод.

2.3. Вариационно-разностный метод

Метод синтезирует вариационные и сеточные методы. Сущность метода состоит в замене неизвестных функций полигональными (сеточными) функциями, узловые значения которых находят из условия стационарности. Функция в пределах участков (между узлами) аппроксимируется линейной, параболической или иной зависимостью более высокого порядка. Вариационно-разностный метод сохраняет все преимущества, присущие каждому из указанных выше методов в отдельности.
Расчет напряженного состояния удобнее всего вести в перемещениях, исходя из начала возможных перемещений, ибо в этом случае существенно облегчается выполнение краевых условий, поставленных как для перемещений, так и для напряжений. Граничные условия в напряжениях, обычно затрудняющие решение задач, становятся естественными, они входят в выражение для энергии и автоматически удовлетворяются при ее минимизации.

2.4. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) является эффективным численным методом решения инженерных и физических задач, том числе и задач теории упругости. Для этого метода характерна ясная физическая трактовка и его можно рассматривать как обобщение классического метода строительной механики – метода перемещений. В основу метода МКЭ заложен метод Ритца, с тем лишь отличием, что в методе Ритца функции (обычно ряды) задаются по всей рассчитываемой области, то в МКЭ они задаются лишь для частей системы и через множество этих функций определяется общее состояние системы.
Сущность метода основана на представлении всей рассматриваемой системы в виде конечного набора элементов (тетраэдров, параллелепипедов, прямоугольных или треугольных пластинок и т.п.), соединенных между собой в узлах. Каждый такой элемент должен сохранять упругие свойства всей системы в данном месте. Кроме того, метод МКЭ включает в себя представление упругих и геометрических характеристик, а также характеристик нагрузки в матричной форме, а вычисление напряжений и перемещений производится при помощи матричной алгебры.
При физической дискредитации в методе МКЭ, вместо реальной континуальной системы рассматривается ее упругий эквивалент, составленный из отдельных элементов, что позволяет свести задачу теории упругости к решению системы алгебраических уравнений взамен решения системы трудно интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных. Основа метода конечных элементов аналогично таковым вариационно-разностного метода.
Способ расчета МКЭ эффективен для нерегулярных конструкций и областей сложной формы, когда непосредственное решение или составление дифференциальных уравнений задачи затруднительно. Этот

метод реализуется как правило на вычислительных машинах, имеющих большой объем памяти большое быстродействие.

Используемая в работе литература

1. Лурье А.И. Теория упругости. М, «Наука», 1970.
2. Х. Хан Теория упругости. Основы линейной теории и ее применение. М, «Мир», 1988.
3. Колосов Г.В. О распределении напряжений в растянутых полосах, ослабленных отверстиями в связи с некоторыми свойствами плоской задачи математической теории упругости.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб. М., «Наука», 1966.
5. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Накова думка», 1968.
6. Кац А.М. Теория упругости. Санкт-Петербург, изд-во «Лань», 2002.
7. Аленксандров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. М, «Высшая школа», 1990.
8. Мавылютов Р.Р. Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций. М., «Наука», 1981.
9. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Изд-во «Самарский университет», 2002.
10. Савин Г.Н. Механика деформируемых тел. Киев, «Наукова думка», 1979.
11. Г. Нейбер Концентрация напряжений. М., ОГИЗ, 1947.
12. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. Киев, «Вища школа», 1975.
13. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. М., «Наука», 1977.
14. Папкович П.Ф. Теория упругости. М-Л., Изд-во оборонной промышленности, 1939.