

Эта часть работы выложена в ознакомительных целях. Если вы хотите получить работу полностью, то приобретите ее воспользовавшись формой заказа на странице с готовой работой:

<https://stuservis.ru/magisterskaya-rabota/70278>

**Тип работы:** Магистерская работа

**Предмет:** Математические методы и моделирование

Содержание:

Введение 2

Глава 1. Математическое моделирование в физике жидкости 5

1.1. Математические модели 5

1.2. Вычислительный эксперимент как часть математического моделирования 10

1.3 Инструменты мультифизического моделирования 21

Глава 2. Анизотропная турбулентность течения в круглой трубе 24

2.1. Анизотропная турбулентность 24

2.1.1. Проблема турбулентности 24

2.1.2. Специфика анизотропной турбулентности 28

2.2 Особенности течения в круглой трубе 32

Глава 3. Моделирование анизотропной турбулентности течения в круглой трубе 36

3.1. Специфика моделирования анизотропной турбулентности течения в круглой трубе 36

3.2. Реализация математического моделирования анизотропной турбулентности течения в круглой трубе 47

3.2.1. Обзор моделей турбулентности 47

3.2.2. Выбор модели турбулентности 52

Заключение 62

Список используемой литературы 64

Приложения 69

Приложение 1 69

Приложение 2 70

Приложение 3 71

Вопросам турбулентности посвящены обширные монографии Хинце [40], А.С.Монина и А.М. Яглома [41].

Поэтому, широко описывать все достижения в этой области в пределах обзорной части данного исследования очень сложно, однако, несомненно, следует выделить основоположника теории турбулентности - Осборна Рейнольдса, который, занимаясь разными вопросами физики, без сомнения, наиболее известен своими работами по течению жидкости и турбулентности.

Он знал о важности турбулентности в инженерной механике жидкости и теплопередаче задолго до проведения экспериментов 1883 года. Примерно за девять лет до появления своего труда о турбулентности, он произвел краткий, но перспективный обзор по теме «О состоянии поверхности нагрева пара котла» (Paper 14 in Reynolds 1900), в котором он указал, что тепло отводится с такой поверхности не только в результате молекулярного воздействия, но и за счет вихрей в потоке, которые смешивают более горячую жидкость с более холодной жидкостью.

Он продолжил предлагать варианты аналогий между теплопередачей и трением, что сегодня назвали бы турбулентным потоком.

Прошло почти 40 лет, прежде чем этот вопрос был рассмотрен и продолжен другими, а именно, Прандтлем (1910) и Тейлором (1916).

В 1877 году Рейнольдс описал методы визуализации движений жидкости с помощью цветных полос. Он сделал это с особым фокусом на движении вихря с учетом вихревых линий и вихревых колец в нескольких ситуационных вариантах. Та же техника визуализации была использована снова в его исследовании ламинарного и турбулентного потока в трубах, которые составляли часть исследования, проведенного им позднее в 1883 году.

В презентации Рейнольдса Британской ассоциации в 1880 году «О влиянии нефти на разрушение волн на поверхности воды», он показал, что ветер, дующий над масляной пленкой, вместо образующихся волн создает вихри, которые появлялись сразу под масляной пленкой (которая принимала вид «листового стекла» и, благодаря своей способности

выдерживать натяжение, приближаться к границе этого условия). Более того, он установил, что вихрей не было бы при отсутствии пленки. Это наблюдение оказалось фундаментальным в том, что ученые начали признавать ключевую роль вязкости в возникновении турбулентности в пристеночном потоке (как он впоследствии дал определение во введении к своей работе 1883 года).

Позже в другой статье он развил свои идеи по этому вопросу, представив результаты эксперимента, в котором две несмешивающиеся жидкости, одна над другой в горизонтальной трубке, могли течь в противоположных направлениях с пленкой и без нее.

Краткий обзор, выпущенный после выхода его работы в 1883 году, он назвал «О двух способах движения воды», где он сравнивает характеристики потока в сходящихся и расходящихся участках, указывая на то, что если первый случай благоприятен для создания устойчивого потока, то в последнем случае поток, вероятно, будет вихревым и неустойчивым.

Именно он противопоставил поведение потока в трубах на глубине и привлек внимание исследователей к этому вопросу.

Он также анализировал влияние кривизны на течение.

В своих трудах он четко указывает на два вида потоков - обтекаемый или извилистый (или, в современной терминологии, ламинарный или турбулентный). Рейнольдс пишет в своих трудах: «Внутреннее движение воды принимает одну или другую из двух широко различимых форм - либо элементы жидкости следуют друг за другом вдоль линий движения, которое ведет самым непосредственным образом к месту назначения, либо они движутся вихрем по извилистым путям, самым косвенным из возможных».

Рейнольдс показал, что для диапазона скоростей потока, диаметров труб и вязкостей переход от первого режима к последнему происходит для примерно того же значения безразмерного параметра, который сегодня носит его имя.

Первым шагом в открытии Рейнольдсом этого параметра, скорее всего был им сделан в результате наблюдения того, что «вода становится намного более склонной к вихрям с повышением температуры». Ему пришло в голову, что это может быть связано с тем, что вязкость воды уменьшалась с повышением температуры.

Изучая уравнения для движения жидкости, он пришел к выводу, что вовлеченные силы имеют два различных типа - инерционный и вязкий - и далее, он понял, что соотношение этих терминов было связано с произведением средней скорости потока на диаметр трубы, поделенное на кинематическую вязкость. В своей статье он написал: «это именно то отношение, которое я искал».

Конечно, здесь не было интегрального уравнения, а только соотношение, без понимания в какой форме уравнение должно выглядеть.

Он предполагал, что если вихри были из-за одной конкретной причины, то интеграция покажет, что рождение вихрей зависит от некоторого, определенного значения. При этом, он признал, что таким образом можно достичь критического значения, иногда называемого «более высоким критическим числом».

Таким образом, во второй серии экспериментов он определил значение числа Рейнольдса, ниже которого сильно турбулентное движение, создаваемое при входе в трубу, распадается на ламинарный поток.

В этом случае, он использовал аппарат для измерения падения давления, чтобы определить режим потока. Хотя Рейнольдс в этой статье никогда не цитировал фактические значения, Аллен (1969) заключил из цифр, которые он цитировал, что для двух ведущих труб, используемых во втором наборе экспериментов, «нижнее критическое число» было 2010 и 2060, тогда как в его более поздних исследованиях (1895) Рейнольдс писал о критическом значении, находящимся между 1900 и 2000.

Двумя рецензентами рукописи, которую Рейнольдс представил в The Royal Society, были сэр Джордж Стоукс и лорд Рэлей, каждый из которых горячо поддержал публикацию Рейнольдса. В своем послании в 1884 году президенту Британской ассоциации в Монреале, Рэлей пишет: «Профессор Рейнольдс с большим успехом проследил переход от одного состояния вещества в другое, и доказал применимость в этих сложных условиях общих законов динамического подобия, адаптированных к вязким жидкостям профессором Стоксом. Несмотря на трудности, которые сопутствуют как теоретическому, так и экспериментальному подходу к данной проблеме, мы можем надеяться в ближайшее время достичь лучшего понимания предмета, который, безусловно, будет иметь непревзойденный научный и практический интерес».

Сэр Джордж Стоукс был президентом Королевского общества с 1885 по 1890 год, и в этом качестве в ноябре 1888 года он вручил Королевскую медаль Общества Осборну Рейнольдсу «за исследования в области математической и экспериментальной физики и за применение научной теории в машиностроении».

В 1894 году Рейнольдс уже 25 лет как был членом Королевского общества, имел Королевскую медаль

Общества и был одним из ведущих инженеров -механиков Англии, а может быть, и не только Англии, а мира.

Свою работу о турбулентности он отправляет в 1984 году Джорджу Стоуксу для ознакомления. Однако, Стоукс не одобрил эту теорию, хотя Рэлей ее поддержал. Лорд Рэлей отправил сэру Стоксу статью Рейнольдса еще раз, для повторного ознакомления, а также, Горацию (позже, сэру Горацию), лэмб-профессору математики в Манчестере, который десять лет назад был избран членом общества. Гораций ответил, что возможно, этот труд должен быть опубликован, хотя в нем и есть некоторые фундаментальные моменты, которые четко не установлены (архив Королевского общества № 208). Так появилась теория турбулентности, которая впоследствии заняла достойное место в фундаментальной гидродинамике.

### 2.1.2. Специфика анизотропной турбулентности

Рассмотрим задачу об обтекании плоской пластины потоком жидкости (см. рисунок). На поверхности пластины, начиная от передней кромки, формируется пограничный слой — область течения, в которой происходит основное изменение скорости жидкости. На передней части пластины течение в погранслое ламинарное. Профиль скорости в этой области легко рассчитать. Но начиная с некоторого расстояния от передней кромки малые хаотические возмущения в потоке усиливаются, в результате чего поток теряет устойчивость, и режим течения в погранслое меняется с ламинарного на переходный, а затем и на турбулентный (рис.9).

#### Рисунок 9 Ламинарный и турбулентные потоки

Переход между тремя режимами течения в погранслое определяется числом Рейнольдса,  $Re = \rho vL/\mu$ , где  $\rho$  - плотность жидкости,  $v$  скорость,  $L$  - характерный линейный размер (в данном случае, расстояние от передней кромки пластины) и  $\mu$  - динамический коэффициент вязкости. Будем рассматривать течение ньютоновской жидкости, то есть такой жидкости, вязкость которой не зависит от скорости сдвига. Многие важные для инженерной практики жидкости и газы, в том числе вода и воздух, являются ньютоновскими. Плотность жидкости может зависеть от давления, однако будем считать, что жидкость несжимаемая, то есть число Маха для рассматриваемого потока не превышает 0.3. Параметр Weakly compressible flow (Слабо сжимаемая жидкость) в настройках гидродинамических интерфейсов COMSOL Multiphysics позволяет пренебречь зависимостью плотности среды от давления и волн сжатия [42].

При ламинарном режиме течения поле скорости может быть найдено из решения стационарных уравнений Навье-Стокса, которые описывают распределение скорости и давления в потоке жидкости. Можно предположить, что скорость жидкости не изменяется во времени, и получить точное описание характеристик потока. В качестве примера можно привести решение задачи Блазиуса о ламинарном течении в пограничном слое. Когда поток начинает переходить к турбулентности, в потоке появляются колебания, несмотря на то, что скорость потока на входе не меняется со временем. Предположение о том, что характеристики течения не зависят от времени, больше не применимо. В этом случае, необходимо решать нестационарную задачу, а расчетная сетка должна быть достаточно мелкой, чтобы на ней можно было разрешить (описать) самые мелкие вихри, образующиеся в потоке, то есть размер элементов сетки должен быть сопоставим с размером самых мелких вихрей. Примером подобной задачи является учебная модель обтекания горизонтального цилиндра. Отметим, что течение нестационарно, но при этом все еще сохраняется ламинарный режим течения. Для решения стационарных и нестационарных задач о ламинарном течении дополнительные модули не требуются, достаточно только базового модуля COMSOL Multiphysics.

С ростом числа Рейнольдса характерный размер вихревых структур в потоке уменьшается, а временной масштаб пульсаций скорости и давления становится столь коротким, что численное решение уравнений Навье-Стокса для большинства практических задач практически невозможно. Для описания таких режимов течения мы можем использовать осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (уравнения Рейнольдса, RANS), в которых мгновенные значения скорости и представлены в виде суммы пульсационной  $u'$  и осредненной по времени  $U$  составляющих. В одно- и двухпараметрических моделях вводятся дополнительные уравнения переноса для характеристик турбулентности, одной из которых является

кинетическая энергия (переменная  $k$  в  $k$ - $\epsilon$  и  $k$ - $\omega$  моделях турбулентности).

В алгебраических моделях используются алгебраические уравнения для турбулентной вязкости, описывающие ее зависимость от поля осредненной скорости и, в некоторых случаях, расстояния от твердых стенок. Найденные значения турбулентных переменных затем используются для расчета турбулентной (вихревой) вязкости, которая прибавляется к молекулярной вязкости жидкости. Импульс, который мог бы переноситься малыми вихревыми структурами, наоборот, диссипирует за счет вязких эффектов. Турбулентная диссипация обычно превосходит вязкую диссипацию во всех областях течения, за исключением вязкого подслоя вблизи твердых стенок. Модель турбулентности должна описывать непрерывное снижение степени турбулентности потока по мере приближения к стенке, как это делают низкорейнольдсовы модели. Либо должны быть рассчитаны новые граничные условия с помощью пристеночных функций.

Относительно масштабности турбулентности следует отметить, что путь турбулентной передачи (каскад) энергии от больших завихрений ко все более и более мелким можно описать с помощью энергетического спектра. На рис. 7 он изображен в логарифмическом масштабе [43]. На этом рисунке в качестве переменной вместо длины используется обратная величина, волновое число  $k = 1/L$ , — иногда так удобнее. Спектр энергии показывает, какая энергия содержится на разных масштабах турбулентности (при разных  $L$  или  $k$ ).

#### Рисунок 10 Путь турбулентной передачи энергии

Энергия вводится в систему на больших масштабах (при малых  $k$ ) с темпом (мощностью)  $\epsilon$  (размерность темпа — энергия в единицу времени). Энергия может поступать, к примеру, от движения ложки в чашке или взмаха руки в воздухе. Затем энергия переходит на все более мелкомасштабные вихри ( $k$  увеличивается), пока на каком-то масштабе (на графике это соответствует значению  $d$ ), энергия не диссипирует и перейдет в тепло. Таким образом, вся энергия, которая вводится на масштабах  $L$  с темпом  $\epsilon$  диссипирует на некотором масштабе  $d$  из-за вязкости.

По сути, тот факт, что число Рейнольдса большое, означает, что характерные масштабы, на которых в систему вводится энергия, гораздо больше масштабов диссипации:  $L \gg d$ , например, в атмосфере это происходит на масштабах в многие сотни километров (причины разные:

#### Список используемой литературы

1. Reynolds O. 1868. The progress of engineering considered with respect to the social condition of this country. A lecture introductory to the Session 1868–69 at Owens College Manchester. Cambridge: Macmillan/Manchester: Sowler
2. Reynolds O. 1872. Sewer Gas and How to Keep it Out of Houses – A Handbook on House Drainage. Cambridge: Macmillan
3. Reynolds O. 1879. On certain dimensional properties of matter in the gaseous state. Philos. Trans. R. Soc. 170:727–845
4. Reynolds O. 1883. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water in parallel channels shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels. Philos. Trans. R. Soc. 174:935–82
5. Reynolds O. 1895. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. Philos. Trans. R. Soc. 186:123–164
6. Reynolds O. 1900. Papers on Mechanical and Physical Subjects, 1870–1880. Collected Works, Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press
7. Reynolds O. 1901. Papers on Mechanical and Physical Subjects, 1881–1900. Collected Works, Vol. 2, pp. 535–77. Cambridge: Cambridge Univ. Press. See also Launder BE, ed. 1995. Osborne Reynolds Centenary Volume. Proc. R. Soc. Ser. A 451:5–47
8. Reynolds O. 1903. Papers on Mechanical and Physical Subjects – The Sub-Mechanics of the Universe, Collected Works, Vol. 3. Cambridge: Cambridge Univ. Press
9. . N. Kolmogorov, “Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence,” Dokl. Akad. Nauk SSSR 32, 16–18 (1941).
10. A. M. Obukhov, “On the spectral energy distribution in a turbulent flow,” Dokl. Akad. Nauk SSSR 32, 22–24 (1941).

11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Гидродинамика (т.Х).
12. Матье Ж., Жандель Д. // Методы расчета турбулентных течений. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. С. 35. (Mathieu J., Jeandel D. // Prediction Methods for Turbulent Flows / Ed. W. Kollmann. New York: Hemisphere publishing corp., 1980. P. 35.)
13. Найфе А. Введение в методы возмущений. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 535 с. (Nayfeh A.H. Introduction to Perturbation Techniques. New York: John Wiley and Sons, 1981.)
14. Launder, B.E. Progress in the developments of a Reynolds-stress turbulence closure / B.E. Launder, G.J. Reece, W. Rodi // J. Fluid Mechanics. – 1975. – Vol. 68. – pp. 537-566.
15. Балонишников А.М. Суррогатная модель Навье–Стокса–Бюргерса для метода моделирования большими вихрями неоднородной турбулентности. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 10. С. 1–4.
16. Hellsten, A. “New advanced turbulence model for high-lift aerodynamics” // AIAA Paper 2004-1120. – Reno, Nevada, 2004.
17. Wallin, S., Johansson, A. “Modelling streamline curvature effects in explicit algebraic Reynolds stress turbulence models” // Journal of Fluid Mechanics. – 2000. – 403. – pp. 89-132.
18. Алексенцев, В.И. Математика: теория и практика оптимизации функций / В.И. Алексенцев. Тула: ИПК и ППРО ТО; институт новых образовательных технологий — официальный партнер Российского государственного гуманитарного университета в г. Туле, 2003. 193 с.
19. Лунев, Владимир Алексеевич. Математическое моделирование и планирование эксперимента [Электронный ресурс] <http://elibr.spbstu.ru/dl/2691.pdf/download/2691.pdf> (дата обращения 15.05.2019).
20. Амосов Н.М. Моделирование сложных систем / Н.М. Амосов. Киев: Наукова думка, 1968.
21. Кирьянов Д.В. Самоучитель Mathcad 13. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
22. MathCad [Электронный ресурс] [www.ptc.com/products/mathcad/](http://www.ptc.com/products/mathcad/) (дата обращения 15.05.2019).
23. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. MATLAB 7. Самоучитель. – М.: Пресс, 2005
24. MathWorks [Электронный ресурс] [www.mathworks.com/](http://www.mathworks.com/) (дата обращения 15.05.2019).
25. Васильев А.Н. Maple 8. Самоучитель. – М.: Диалектика, 2003.
26. MapleSoft [Электронный ресурс] [www.maplesoft.com/](http://www.maplesoft.com/) (дата обращения 15.05.2019).
27. Дьяконов В.П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления. – М.: ДМК-Пресс, 2008.
28. Шмидский Я.К. Mathematica 5. Самоучитель. Система символьных, графических и численных вычислений. – М.: Диалектика, 2004.
29. Wolfram [Электронный ресурс] [www.wolfram.com/](http://www.wolfram.com/) (дата обращения 15.05.2019).
30. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В., Рудченко Е.А. Scilab: Решение инженерных и математических задач. БИНОМ. Лаборатория знаний. – М., 2008
31. SciLab [Электронный ресурс] [www.scilab.org/](http://www.scilab.org/) (дата обращения 14.05.2019).
32. Ильина В.А., Силаев П.К.. Система аналитических вычислений MAXIMA для физиков-теоретиков. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007.
33. Maxima [Электронный ресурс] [www.maxima.sourceforge.net/](http://www.maxima.sourceforge.net/) (дата обращения 15.05.2019).
34. Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. – М.: Наука, 1989.
35. ReduceAlgebra [Электронный ресурс] [www.reduce-algebra.com/](http://www.reduce-algebra.com/) (дата обращения 14.05.2019).
36. Платформа 3DEXPERIENCE [Электронный ресурс] <https://www.3ds.com/ru/produkt-y-i-uslugi/simulia/produkt-y/3dexperience/> (дата обращения 10.06.2019)
37. Программный комплекс PRADIS [Электронный ресурс] <http://laduga.ru/%D0%B8%D0%BD%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5-%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D1%8B/pradis-%D0%BC%D1%83%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%B8%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B0/> (дата обращения 10.06.2019).
38. Программное обеспечение MpCCI [Электронный ресурс] <http://www.mpcci.de/mpcci-software.html> (дата обращения 10.06.2019).
39. Среда мультифизического моделирования COMSOL Multiphysics® [Электронный ресурс] <https://www.comsol.ru/products> (дата обращения 10.06.2019).
40. Хинце И.О. Турбулентность. Ее механизм и теория. М.: Физматгиз, 1963. 680с.
41. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидродинамика. Теория турбулентности. СПб: Гидрометеоиздат, 1996. Т.2. 742с.
42. COMSOL Multiphysics [Электронный ресурс] <https://www.comsol.com/> (дата обращения 20.05.2019)
43. Элементы [Электронный ресурс] [https://elementy.ru/problems/1758/Masshtaby\\_turbulentnosti](https://elementy.ru/problems/1758/Masshtaby_turbulentnosti) (дата

обращения 19.05.2019).

44. Моделирование турбулентных течений: Учебное пособие / И.А. Белов, С.А. Исаев, Балт. гос. техн. ун-т. СПб., 2001. 108 с.

45. Балонишников А.М. Вывод уравнения переноса диссипации из уравнения переноса турбулентной вязкости. [Электронный ресурс]

file:///C:/Users/User/Desktop/%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B1%D1%83%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BD%D

46. Филиппов А.С. Турбулентность и её моделирование [Электронный ресурс]

file:///C:/Users/User/Desktop/%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B1%D1%83%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BD%D

(дата обращения 20.05.2019)

47. Comsol [Электронный ресурс] <https://www.comsol.ru/blogs/which-turbulence-model-should-choose-cfd-application/> (дата обращения 19.05.2019).

48. Wilcox D.C. Turbulence modeling for CFD. 1998. 537p

49. ANSYS CFX Reference Guide. / ANSYS Inc.- ANSYS CFX Release 11.- 2006.

50. Юн, А.А. Теория и практика моделирования турбулентных течений [Текст] / А.А. Юн - М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. - 272 с.

51. Menter, F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. // AIAA-Journal.-1994.- 32(8).-pp. 1598 - 1605.

*Эта часть работы выложена в ознакомительных целях. Если вы хотите получить работу полностью, то приобретите ее воспользовавшись формой заказа на странице с готовой работой:*

<https://stuservis.ru/magisterskaya-rabota/70278>