Тип работы: Контрольная работа

Предмет: Математические методы и моделирование

Задача 1.
$2x_1+4x_2\to\max$
$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\le 11, \\ -2x_1+x_2\le 2, \\ x_1-x_2\le 0, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$$
(решение можно проводить либо графическим методом, либо с использованием компьютера в программе MS Excel).

Задача 2. Дан временной ряд, характеризующий динамику по месяцам численности занятых в сфере услуг фирмы.
Месяц (t) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
Численность (y) 34 36 39 44 52 55 59 65 67 73 82 86 92 93 98
Определить оптимальный тренд и рассчитать точечный прогноз на последующие пять месяцев. Проверить модель на значимость.

Задача 3. Приведите пример, связанный с вашей непосредственной деятельностью, в котором для принятия решения Вы использовали метод анализа иерархий (МАИ). Приведите численную реализацию решения.

Задача 4. В таблице представлены: расходы предприятия на рекламу и продвижение товаров на рынок Y и прибыль предприятия X.

Y	X
18	36
15	36
22	43
29	34
26	31
15	43
19	35
24	31
20	38
27	33
24	35
26	38
24	40
19	33
28	34
24	42
18	41
13	32
18	41
29	39
30	32

Провести линейный регрессионный анализ расходов предприятия на рекламу в зависимости от прибыли предприятия. Проверить значимость регрессионной модели. Осуществить прогноз с помощью регрессионной модели для x = 45.

Задача 5. Имеются следующие данные о курсе доллара x1, фондовом индексе x2 и котировке акций y за 10 дней.

x1 38,75 38,7 38,54 38,9 38,88 35,35 37,98 36,1 36,05 37,9
x2 4,5 4,8 4,7 5,4 4,9 4,9 4,8 4,3 4,8 4,7
y 120 116 108 106 103 101 115 103 102 106

Провести линейный множественный регрессионный анализ. Проверить значимость модели. Проверить модель на мультиколлинеарность. Спрогнозируйте котировку акций, если курс доллара составит 35 руб., а значение фондового индекса равно 5,4.

Задача 6.
По ряду районов края определены: среднесуточное количество йода в воде и пище и пораженность населения заболеванием щитовидной железы. Данные приведены в таблице. Для оценки тесноты связи пораженности заболеванием щитовидной железы с количеством йода в воде и пище определите коэффициент корреляции рангов Спирмена и проверьте его значимость.
Номер района Количество йода в воде и пище,
X (усл. ед.) Пораженность населения заболеванием
щитовидной железы, Y (%)
1 201 0,2
2 178 0,6
3 155 1,1
4 154 0,8
5 126 2,5
6 281 4,4
7 71 16,9

Задача 7. Найти оптимальные стратеги игроков и цену игры по заданной матрице

Задача 1.
$2x_{1}+4x_2\to max$
$\begin{cases} 3x_1+2x_2\le 11, \\ -2x_1+x_2\le 2, \\ x_1-x_2\le 0, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$
Решим задачу 1 графическим методом
Необходимо найти максимальное значение целевой функции
F = 2x1 + 4x2 → max, при системе ограничений:
3x1 + 2x2 ≤ 11, (L1)
-2x1 + x2 ≤ 2, (L2)
x1 - x2 ≤ 0, (L3)
x1 ≥ 0,
x2 ≥ 0.
Шаг № 1. Построим область допустимых решений, т.е. решим графически систему неравенств. Для этого построим каждую прямую и определим полуплоскости, заданные неравенствами (полуплоскости обозначены стрелкой).
Построим уравнение 3x1 + 2x2 = 11 по двум точкам. Для нахождения первой точки приравниваем x1 = 1. Находим x2 = 4. Для нахождения второй точки приравниваем x2 = 1. Находим x1 = 3. Соединяем точку (1; 4) с (3; 1) прямой линией. Определим полуплоскость, задаваемую неравенством. Выбрав точку (0; 0), определим полуплоскость координаты точек которой удовлетворяют неравенству 3x1 + 2x2 – 11 ≤ 0: 3 · 0 + 2 · 0 - 11 ≤ 0, т.е. неравенство 3x1 + 2x2 – 11 ≤ 0 определяет полуплоскость, содержащую начало координат.
Построим уравнение -2x1 + x2 = 2 по двум точкам. Для определения первой точки приравниваем x1 = 0 и находим x2 = 2. Для определения второй точки приравниваем x2 = 4 и находим x1 = 1. Проводим прямую проходящую через точки (0; 2) с (1; 4). Определим полуплоскость, задаваемую неравенством -2x1 + x2 – 2 ≤ 0. Выбрав точку (0; 0), определим знак неравенства в полуплоскости: -2 · 0 + 1 · 0 - 2 ≤ 0, т.е. -2x1 + x2 – 2 ≤ 0. Таким образом это неравенство определяет полуплоскость содержащую начало координат.
Построим уравнение прямой x1 - x2 = 0 по двум точкам. Для определения первой точки приравниваем x1 =

1, находим x2 = 1. Для определения второй точки приравниваем x2 = 0, находим x1 = 0. Соединяем точку (1; 1) с (0; 0) прямой линией. Определим полуплоскость, задаваемую неравенством x1 - x2 ≤ 0. Выбрав точку (0; 1), замечаем, что её координаты удовлетворяют неравенству 0 · 0 - 1 · 1 ≤ 0, т.е. x1 - x2 ≤ 0. Следовательно, это неравенство задаёт полуплоскость содержащую точку (0; 1).
Шаг № 2. Замечаем, что пересечением указанных полуплоскостей будет являться область, представляющую собой пятиугольник ABCDE (выделен на рисунке зелёным цветом) координаты точек которого удовлетворяют одновременно всем неравенствам системы ограничений задачи.

Шаг № 3. Рассмотрим целевую функцию задачи F = 2x1 + 4x2 → max.
Построим прямую, отвечающую значению функции F = 2x1 + 4x2 = 0 (выделена на рисунке красным цветом). Вектор-градиент $\vec{C}$, составленный из коэффициентов целевой функции, указывает направление максимизации F(X). Начало вектора – точка (0; 0), конец – точка (2;4). Будем двигать эту прямую параллельным образом. Поскольку нас интересует максимальное решение, поэтому двигаем прямую до последнего касания обозначенной области.
Прямая F(x) = const пересекает область в точке C. Так как точка C получена в результате пересечения прямых (L1) и (L2), то ее координаты удовлетворяют системе из уравнений этих прямых:
$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 11 \\ -2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$
Решив систему уравнений, получим: x1 = 1, x2 = 4
Таким образом имеем, что максимальное значение целевая функция принимает в точке (1; 4) которое равно F(X) = 2·1 + 4·4 = 18.

Задача 2. Дан временной ряд, характеризующий динамику по месяцам численности занятых в сфере услуг фирмы.
Месяц (t) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
Численность (y) 34 36 39 44 52 55 59 65 67 73 82 86 92 93 98

Определить оптимальный тренд и рассчитать точечный прогноз на последующие пять месяцев. Проверить модель на значимость.
Решение.
1. Построим корреляционное поле.

На корреляционном поле отчетливо наблюдается прямая линейная зависимость между данными факторами.
2. Определим оптимальный тренд, который в данном случае задаётся уравнением линейного тренда:
y = a + b·t.
Это уравнение может быть получено с помощью метода наименьших квадратов МНК (этот метод дает наилучшие (состоятельные, эффективные и несмещенные) оценки параметров уравнения регрессии).
Формально критерий МНК можно записать так:
S = ∑(yi - y*i)2 → min
Тогда реализующая этот метод система нормальных уравнений будет иметь следующий вид.
$\begin{cases} a \cdot n + b \cdot \sum t = \sum y, \\ a \cdot \sum t + b \cdot \sum t^2 = \sum y \cdot t. \end{cases}$
Здесь y – величина показателя, t – фактор времени, a и b – параметры уравнения.
Поиск параметров для линейного уравнения регрессии временного ряда можно упростить, если отсчет времени производить так, чтобы сумма показателей времени изучаемого ряда динамики была равна нулю. Для этого при нечетном числе уровней ряда динамики уровень, находящийся в середине ряда, принимается за условное начало отсчета времени (периоду или моменту времени, соответствующему данному уровню присваивается нулевое значение). Даты времени, расположенные левее этого уровня, обозначаются натуральными числами со знаком минус (–1 –2 –3 ...), а даты времени, расположенные правее этого уровня – натуральными числами со знаком плюс (1 2 3 ...).
Если число уровней ряда четное, периоды времени левой половины ряда (до середины) нумеруются –1, –3, -5 и т.д. А периоды правой половины +1, +3, +5 и т.д.
В таком случае система нормальных уравнений примет следующий, более простой вид:
$\begin{cases} a = \sum y / n, \\ b = \sum y \cdot t / \sum t^2. \end{cases}$
В данной задаче число уровней динамики временного ряда – нечётно.
Для построения линейного уравнения тренда составим таблицу 1 (последние два столбца заполнены после

определения оптимального тренда).

Таблица 1

t	y	t2	y2	y · t	$\|y_i-y_t\|$	$\|y_i-y_t\|:y_i$
-7	34	49	1156	-238	2,9248	0,086024
-6	36	36	1296	-216	0,0784	0,002178
-5	39	25	1521	-195	1,768	0,045333
-4	44	16	1936	-176	1,6144	0,036691
-3	52	9	2704	-156	1,5392	0,0296
-2	55	4	3025	-110	0,3072	0,005585
-1	59	1	3481	-59	1,1536	0,019553
0	65	0	4225	0	0	0
1	67	1	4489	67	2,8464	0,042484
2	73	4	5329	146	1,6928	0,023189
3	82	9	6724	246	2,4608	0,03001
4	86	16	7396	344	1,6144	0,018772
5	92	25	8464	460	2,768	0,030087
6	93	36	8649	558	1,0784	0,011596
7	98	49	9604	686	0,9248	0,009437
∑=0	∑= 975	∑=280	∑=69999	∑=1357		∑=0,391

Согласно данным таблицы 1 система нормальных уравнений имеет вид

$\begin{cases} a = 975/15, \\ b = 1357/280, \end{cases}$

откуда получаем, что

$\begin{cases} a = 65, \\ b = 4,8464. \end{cases}$

Итак, получили эмпирические коэффициенты регрессии:

b = 4,8464, a = 65.

Отсюда уравнение регрессии (эмпирическое уравнение регрессии) имеет вид:

y = 4,8464·t + 65.

3. Рассчитаем точечный прогноз на последующие пять месяцев.

y(8) = 65 + 4,8464·8 = 104;

y(9) = 65 + 4,8464·9 = 109;

y(10) = 65 + 4,8464·10 = 113;

y(11) = 65 + 4,8464·11 = 119;

y(12) = 65 + 4,8464·12 = 123;

4. Проверим модель на значимость.

1. Гусаров В.И. Теория статистики. М.: ЮНИТИ, 2003.
2. Ефимова М.Р. Общая теория статистики / М.Р. Ефимова, Е.В. Петрова, В.Н. Румянцев. М.: Инфра-М, 2006.
3. Ефимова М.Р. Статистика: Учебное пособие. М.: Инфра-М, 2007.
4. Харченко Л.П. Статистика: Курс лекций / Л.П. Харченко, В.Г. Долженкова, В.Г. Ионин. Новосибирск: Инфра-М, НГАЭиУ, 2003.
5. Шмойлова Р.А. Практикум по теории статистики. М.: Финансы и статистика, 2004.
6. Шмойлова Р.А. Теория статистики. М.: Финансы и статистика, 2006